第 1 章

拓扑动力系统基础

拓扑动力系统的研究有一个一般框架，由一些基本概念和它们之间的相互关系构成. 任何特殊系统的讨论都围绕这个框架进行. 本章的目的，是在最一般的情形下给出这个框架，包括动力系统的定义、子系统、回复性、传递性和混合性以及拓扑共轭和半共轭等. 另外两个重要概念——拓扑熵和混沌留待下一章去讨论. 本章和下一章的目的是两重的，一方面为读者提供较为完整的拓扑动力系统基础，另一方面则是为本书后面的讨论提供方便.

§1 动力系统和子系统

§1.1 动力系统和子系统

设 X 为紧致度量空间，

$$f:\ X\to X$$

为从 X 到自身的连续映射.

f 可以看作是 X 上的一个作用：每一点 $x\in X$ 在 f 作用下生成象点 $f(x)$. $f(x)$ 仍然是 X 中的点，f 可以对它继续作用，生成象点 $f(f(x))=f^2(x)$. 这个过程可以无限进行下去，即

$f^0=\mathrm{id}$, 即 X 上的恒同映射，

$f^1=f$,

$f^2=f\circ f$,

一般地，对 $n\geqslant 2$,

$$f^n=f^{n-1}\circ f,$$

其中符号 $\circ$ 表示映射的复合.

定义 1　X 上连续自映射序列

$$\{f^0, f, f^2, \cdots\cdots\}$$

叫作"X 上由连续自映射 f 经迭代而生成的**离散拓扑半动力系统**".

当 f 是 X 上自同胚时，存在相反方向的迭代，因而得到

$$\{\cdots, f^{-n}, \cdots, f^{-1}, f, f, f^2, \cdots, f^n, \cdots\}.$$

这叫作"X 上由自同胚 f 经迭代而生成的**离散拓扑动力系统**".

对 X 和 f 加上可微性条件，可以定义离散微分动力系统或半动力系统，也可以定义连续动力系统(即流). 本书不涉及这些，我们不去讨论.

本书讨论的主要对象是离散拓扑半动力系统. 除非另有声明，我们总是用(X, f)表示由紧致可度量空间 X 上的连续自映射 f 生成的离散拓扑半动力系统，简称**动力系统**或**紧致系统**. 所以，一个动力系统由两个概念合成，即紧致度量空间(底空间)和它上面的一个连续自映射(连续作用).

[例 1]　设 $X=I=[0, 1]$, (I, f)叫作**线段自映射**，或**线段动力系统**. 线段动力系统是最简单的非平凡动力系统，也是目前研究得比较充分，成果比较丰富的动力系统. 线段动力系统是唯一可以在平面上画出图象的动力系统，这就给对它的研究带来了极大方便. 例如，从图象上可以一眼看出，线段自映射一定有不动点，即映射图象与相空间对角线的交点. 另外，也很容易在图象上从一点找到它的象点，如图 1-1 所示.

线段自映射即是读者比较熟悉的一元连续函数. 我们将会看

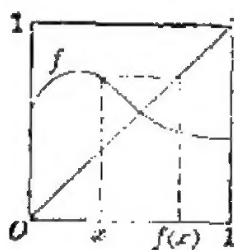


图　1-1



(i)　　(ii)

图　1-2

到，一元函数和由它生成的动力系统有重大不同. 例如，线性或分段线性函数一般被认为是简单的，但是由分段线性函数生成的动力系统却不一定简单，有时比非线性函数生成的动力系统要复杂得多. 图 1-2 中图(i)，作为一元函数不一定简单，但作为动力系统则是简单的. 相反，图(ii)作为函数是简单的，但作为动力系统则是非常复杂的. 导致这种区别的原因是，函数研究往往不考虑迭代，而动力系统则主要是研究点在迭代作用下的渐近性质. 对图 1-2 中图(i)而言，每一点在迭代作用下都趋向 f 的唯一的不动点，因而作为动力系统它是简单的. 但对图 1-2 中图(ii)而言，绝大多数点在迭代作用下都是非常复杂的，因而由这个分段线性函数生成的动力系统就非常复杂.

[例 2] 设 $X=S^1$，即圆周. (S^1, f)叫作**圆周自映射**，或**圆周动力系统**. 圆周动力系统在紧致曲面上微分动力系统研究中有重要应用.

线段和圆周是仅有的一维紧致连通流形，它们上面的动力系统既有紧密联系，亦有重大不同. 例如，如前所述，线段动力系统一定有不动点，但圆周动力系统却不一定. 线段和圆周动力系统通称**一维动力系统**. 一维动力系统受底空间拓扑结构制约过强，其结论往往不能向一般情形推广.

定义 2 设(X, f)为紧致系统. 如果紧致子集 $X_0\subset X$ 对 f 不变，即

$$f(X_0)\subset X_0,$$

则把 f 在 X_0 上的限制映射

$$f|_{X_0}: \qquad X_0\to X_0$$

所生成的紧致系统$(X_0, f|_{X_0})$或$f|_{X_0}$，称为(X, f)或 f 的**子系统**.

子系统在动力系统研究中扮演着重要角色. 大体而言，给定一个紧致系统(X, f)，我们要研究的是它的动力性状，例如下面将要定义的周期轨道的存在性等. 很显然，(X, f)的每一个子系

统的动力性状是(X,f)的动力性状的一部分，而(X,f)的全体动力性状可由它的全部子系统决定.

对每一点$x\in X$，x在f作用下生成的轨道

$$\{x,\ f(x),\ \cdots,\ f^n(x),\ \cdots\}$$

记作$\mathrm{orb}(x)$. 我们将会看到，动力系统的问题是多种多样的，但其核心问题却是轨道的渐近性质或拓扑结构，即当$n\to\infty$时轨道的极限性质.

给定$x\in X$，易见x的轨道$\mathrm{orb}(x)$是对f不变的，因而紧致子集$\overline{\mathrm{orb}(x)}$（即轨道的闭包）也对$f$不变. 因此

$$f|_{\overline{\mathrm{orb}(x)}}:\qquad \overline{\mathrm{orb}(x)}\to\overline{\mathrm{orb}(x)}$$

是子系统. 这是构造子系统的一种重要方法. 这种子系统也是最基本最重要的子系统.

§1.2 映射空间

设X为紧致度量空间，d是它的一个拓扑度量. 记X上全体连续自映射的集合为$C^0(X)$. 下面在$C^0(X)$上定义一个度量，使$C^0(X)$成为完备度量空间.

定义3 假设同上. 令

$$\rho:\ C^0(X)\times C^0(X)\to\mathbb{R}^+,$$

使得

$$\rho(f,\ g)=\sup_{x\in X}\{d(f(x),\ g(x))\}.\qquad \forall f,g\in C^0(X)$$

据X的紧致性，易见ρ是有定义的，且易于验证下述条件满足：

i) $\rho(f,\ g)=0\Leftrightarrow f=g,\ \forall f,g\in C^0(X)$;

ii) $\rho(f,\ g)=\rho(g,\ f),\ \forall f,g\in C^0(X)$;

iii) $\rho(f,\ h)\leqslant\rho(f,\ g)+\rho(g,\ h),\ \forall f,g,h\in C^0(X)$.

因此ρ是$C^0(X)$上一个度量. 进而，易于验证对ρ而言，$C_0(X)$是完备空间，即$C^0(X)$上的每一个柯西序列都收敛到$C^0(X)$中

的一个点. 由 ρ 诱导的 $C^0(X)$ 的拓扑, 称为 C^0-拓扑或一致收敛拓扑.

给定一个紧致可度量空间 X, X 上的动力系统的问题大致可以分为两类: 一类是孤立地讨论由一个自映射生成的动力系统的动力性状; 另一类则是把一个动力系统看作是 $C^0(X)$ 中的一个点, 研究在诸如微小扰动下动力性状的改变. 在本书所讨论的范围内, 前者是主要的, 仅在少数情形下涉及后者; 而在微分动力系统研究中, 情形刚好相反. 例如, 一个时期以来, 微分动力系统的核心问题——大范围结构稳定性问题就是探讨在微扰下系统动力性状的改变问题(参见[9]和[10]).

§2 回 复 性

§2.1 回 复 性

如我们在§1中所说, 动力系统的核心问题是点的轨道的渐近性质或拓扑结构. 以后我们将会看到, 只有那些具有某种回复性的点的轨道才是重要的. 下面我们引进回复性的概念.

设 (X, f) 为紧致系统.

定义 1 对于 $x\in X$, 如果存在整数 $n>0$, 使得 $f^n(x)=x$, 则把 x 叫作 f 的周期点; 并把使 $f^n(x)=x$ 成立的最小正整数 n 叫作它的周期.

f 的全体周期点的集合, 记作 $P(f)$.

周期为1的周期点叫作不动点. f 的全体不动点的集合记作 $F(f)$. 易证, $F(f)$ 是 X 的一个闭子集.

周期性是最强的回复性, 也是最重要的回复性. 下面陆续引进的回复性都是周期性的推广.

[例 1] 线段自映射 (I, f) 一定有不动点, 因此

$$\varnothing\neq F(f)\subset P(f).$$

如上节所述, 这是由底空间 I 的拓扑结构所决定的.

[例 2] 圆周自映射(S^1, f)情形比较复杂，它可以有不动点，也可以没有；它可以有周期点但无不动点，也可以无周期点．例如，绕圆心的一个无理角度旋转就没有周期点，而有理角度旋转，一般就无不动点但有周期点．

[例 3] 记 B^n 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 1)$中的实体球．据著名的布劳韦尔不动点定理，$(B^n, f)$一定有不动点(参见[6])．

定义 2 对于 $x\in X$，如果存在正整数递增序列 n_i，使

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x)=x;$$

或等价地，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $n>0$，使

$$f^n(x)\in V(x, \varepsilon),$$

这里 $V(x,\varepsilon)=\{y\in X\,|\,d(x, y)<\varepsilon\}$ 是 x 的半径为 ε 的球形邻域，则把 x 叫做 f 的回复点．

显然，回复性是周期性的推广．f 的全体回复点的集合记作 $R(f)$．以后将证明，每一个紧致系统都有回复点，即 $R(f)$ 总是不空的．

定义 3 对于 $x\in X$，如果存在 $\varepsilon>0$，使

$$f^n(V(x, \varepsilon))\cap V(x, \varepsilon)=\varnothing, \qquad \forall n>0$$

则把 x 叫做 f 的游荡点；如果 x 不是 f 的游荡点，即对每一个 $\varepsilon>0$，存在 $n>0$，使

$$f^n(V(x, \varepsilon))\cap V(x, \varepsilon)\neq\varnothing,$$

则把 x 叫做 f 的非游荡点．

从定义可以看出，f 的游荡点集合是 X 的一个开子集．因而，f 的非游荡点的集合是 X 的闭子集，叫作 f 的**非游荡集**，记作 $\Omega(f)$．

从定义易见，

$$F(f)\subset P(f)\subset R(f)\subset\Omega(f).$$

而且，容易验证，它们对 f 都是不变的．例如，

$$f(R(f))\subset R(f),$$

等. X 的这个子集合序列构成了 f 的回复性的几个不同层次. 可以举例说明, 上述包含关系的每一个都可以是真包含, 而且 $P(f)$ 和 $R(f)$ 一般不是闭子集. 再者, 回复点是点本身在迭代作用下回复, 而非游荡点则是点的邻域的回复. 非游荡性是最弱的回复性. 限制在非游荡集上的子系统

$$f|_{\Omega(f)}:\qquad \Omega(f)\to\Omega(f)$$

是最重要的子系统, 在某种意义下, 它可以代替原系统而保留全部重要动力性状.

设 $\Lambda\subset X$ 是对 f 不变的闭子集, 易证

$$F(f|_\Lambda)=F(f)\cap\Lambda,$$
$$P(f|_\Lambda)=P(f)\cap\Lambda,$$
$$R(f|_\Lambda)=R(f)\cap\Lambda,$$

但一般地,

$$\Omega(f|_\Lambda)\subset\Omega(f)\cap\Lambda$$

可以是真包含.

考虑如图 2-1 所示的线段动力系统 (I, f). 易证 $x\notin\Omega(f|_\Lambda)$, 但 $x\in\Omega(f)$. 因为 x 在 Λ 内的邻域形如 $V_-(x, \varepsilon)=(x-\varepsilon, x]$, 而 $f(V_-(x, \varepsilon))=\{a\}$, a 是 f 的不动点. 显然, $x\notin\Omega(f|_\Lambda)$. x 在 I 中的邻域是 $V(x, \varepsilon)=V_-(x, \varepsilon)\cup V_+(x, \varepsilon)=(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. 易见, 存在 $n>0$, 使 $f^n(V_+(x, \varepsilon))\ni 0$, 但 $f(0)=x$. 故

$$f^{n+1}(V(x, \varepsilon))\cap V(x, \varepsilon)\neq\varnothing,$$

即
$$x\in\Omega(f)\cap\Lambda.$$

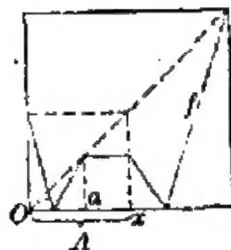


图 2-1

§ 2.2 ω-极限集

设 (X, f) 为紧致系统.

定义 4 设 $x\in X$. 如果存在递增序列 n_i, 使

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x)=y,$$

则把点 y 叫做 x 的 ω-极限点（$y\in X$）；并称 x 的全体 ω-极限点的集合为 x 的 ω-极限集，记作 $\omega(x, f)$．易证

$$\omega(x, f)=\bigcap_{n\geq 0}\overline{\bigcup_{k\geq n}\operatorname{orb}(f^k(x))},$$

即 $\omega(x, f)$是 x 的轨道 $\operatorname{orb}(x)$的全体极限点的集合．当 $x\in P(f)$时，显然

$$\omega(x, f)=\{x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\},$$

其中 $n\geq 1$ 是 x 的周期．$\omega(x, f)$描述了 x 的轨道的渐近性质或拓扑结构．在这个意义上可以说，ω-极限集是动力系统的最基本和最重要的概念之一．

命题 1　设 $x\in X$．则 $\omega(x, f)$是 X 的非空闭子集．

证明　$\operatorname{orb}(x)$是紧致度量空间 X 上的一个序列，因此它有子序列收敛到 X 上某一点，这个点包含在 $\omega(x, f)$内，故 $\omega(x, f)$不空．$\omega(x, f)$的闭性易由定义直接看出．　□

命题 2　设 $x\in X$．则

$$f(\omega(x, f))=\omega(x, f)=\omega(f^i(x), f). \qquad \forall i>0$$

这可从定义直接去证明．

限制在 $\omega(x, f)$上的子系统是最重要的子系统，动力系统的重要问题的研究往往归结为这样的子系统的研究．

命题 3　设 $x\in X$．则

$$x\in R(f)\Leftrightarrow x\in\omega(x, f).$$

可从定义直接去证明．

定义 5　设 $x\in X$．若存在 $p\in P(f)$，使

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p))=0,$$

则称 x 为 f 的**渐近周期点**．当存在 $k>0$，使

$$f^k(x)\in P(f)$$

时，则称 x 为 f 的**终于周期点**．

显然，终于周期点是渐近周期点．易于举例说明，终于周期点可以不是周期点，渐近周期点也可以不是终于周期点．再者，易见非周期的渐近周期点不是回复点．f 的渐近周期点集和终于周期点集分别用 $AP(f)$ 和 $EP(f)$ 来表示．

命题 4 设 $x\in X$．则 $x\notin AP(f)$ 蕴涵 $\omega(x, f)$ 不可数．

证明 设 $x\notin AP(f)$．先设 $\omega(x, f)$ 有限而导致矛盾．这时 $\omega(x, f)$ 中每一点都是 f 的终于周期点，因而 $\omega(x, f)$ 有 f 的周期点．不妨设 $\omega\in\omega(x, f)$ 是 f 的周期点，其周期为 $n\geqslant 1$．

记

$$\varepsilon=\min_{\substack{y,z\in\omega(x,f)\\ y\neq z}}\{d(y, z)\}>0.$$

据 f 在 X 上的一致连续性，存在 $\frac{\varepsilon}{2}>\delta>0$，使

$$y, z\in X,\ d(y, z)<\delta \Rightarrow d(f(y), f(z))<\frac{\varepsilon}{2}.$$

显然，存在充分大的 $k>0$，使得当 $l>k$ 时，

$$f^l(x)\in\bigcup_{y\in\omega(x,f)}V(y, \delta).$$

不妨设 $f^l(x)\in V(\omega, \delta)$．于是

$$f^{l+1}(x)\in V\left(f(\omega), \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

而据 $\varepsilon>0$ 的定义，易见有

$$f^{l+1}(x)\in V(f(\omega), \delta).$$

这蕴涵

$$f^{l+i}(x)\in V(f^i(\omega), \delta). \qquad \forall i>0$$

由于 $\delta>0$ 可以任意小，这明显蕴涵

$$\lim_{l\to\infty}d(f^l(x), f^l(\omega))=0,$$

即 x 是渐近周期点，与假设矛盾．上面证明了 $\omega(x, f)$ 不可能是有限的．

下设 $\omega(x, f)$ 无限但可数．易见，$\omega(x, f)$ 无孤立点．令

$$\omega(x, f)=\{y_1, y_2, \cdots\}.$$

任取 $\delta>0$, 存在 $n_1>0$, 使

$$y_{n_1}\in V(y_1, \delta).$$

取 $\delta_1>0$, 使

$$\overline{V(y_{n_1}, \delta)}\subset V(y_1, \delta)$$

且

$$y_l\notin V(y_{n_1}, \delta_1). \qquad l=1, 2, \cdots, n_1-1$$

归纳地, 对 $i>0$ 和 $y_{n_i}\in V(y_{n_{i-1}}, \delta_{i-1})$, 取 $\delta_i>0$, 使

$$\overline{V(y_{n_i}, \delta_i)}\subset V(y_{n_{i-1}}, \delta_{i-1})$$

且

$$y_l\notin V(y_{n_i}, \delta_i). \qquad l=1, 2, \cdots, n_i-1$$

显然, 当 $i\to\infty$ 时, $\delta_i\to 0$. 据拓扑学中著名的贝尔(R. L. Baire)定理(广义区间套定理, 参见[2]),

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{V(y_{n_i}, \delta_i)}=\{y\},$$

其中 $y\in\omega(x, f)$. 易见

$$y\notin\{y_1, y_2, \cdots\}=\omega(x, f).$$

这矛盾就证明了 $\omega(x, f)$是不可数的. □

推论 设 $x\in X$, 则 $\omega(x, f)$或是由 f 的一条周期轨道组成, 或不可数.

命题 5 设 $x\in X$. 则对任意 $n>0$, 有

$$\omega(x, f)=\bigcup_{i=0}^{n-1}\omega(f^i(x), f^n),$$

$$f(\omega(f^i(x), f^n))=\omega(f^{i+1}(x), f^n), \qquad i=0, 1, \cdots, n-2$$

$$f(\omega(f^{n-1}(x), f^n))=\omega(x, f^n).$$

从定义出发即可直接验证.

命题 6 $R^n(f)=R(f)$, $\forall n>0$.

证明 $R(f)\supset R(f^n)$是明显的. 下面用归纳法证明 $R(f)\subset R(f^n)$, $\forall n>0$.

当 $n=1$ 时，结论当然成立．设 $m>0$，结论对 $n\leqslant m$ 已经成立．下面证明 $n=m+1$ 时结论亦成立．

设 $x\in R(f)$．据命题 5，

$$x\in\omega(x,f)=\bigcup_{i=0}^{n-1}\omega(f^i(x),f^n).$$

若 $x\in\omega(x,f^n)$，则结论已获证．下设 $0<p<n$ 是最小的整数，使

$$x\in\omega(f^p(x),f^n).$$

易于证明，这蕴涵

$$\omega(x,f^n)\subset\omega(f^p(x),f^n)=f^p(\omega(x,f^n)).$$

因此，p 亦是满足

$$\omega(x,f^n)\subset f^p(\omega(x,f^n))$$

的最小正整数．

因为 $f^n(\omega(x,f^n))\subset\omega(x,f^n)$，所以存在最小的正整数 $t\leqslant n$，使

$$f^t(\omega(x,f^n))\subset\omega(x,f^n).$$

我们有

$$f^t(\omega(x,f^n))\subset\omega(x,f^n)\subset f^p(\omega(x,f^n)).$$

不妨设 $p\leqslant t$，并用 f^{t-p} 作用上式，得

$$f^{t-p}(\omega(x,f^n))\subset f^t(\omega(x,f^n))\subset\omega(x,f^n).$$

据关于 t 的假设，我们有 $t=p$，且

$$f^p(\omega(x,f^n))=\omega(x,f^n).$$

令 $n=pq+r$，$0\leqslant r<p$，q 和 r 均是非负整数．我们有

$$\begin{aligned}\omega(x,f^n)=f^n(\omega(x,f^n))&=f^r(f^{pq}(\omega(x,f^n)))\\&=f^r(\omega(x,f^n)).\end{aligned}$$

据关于 p 的假设，$r=0$．因此 $n=pq$．

若 $p=1$，则

$$\omega(x,f^n)=\omega(f(x),f^n)=\cdots=\omega(f^{n-1}(x),f^n).$$

易见，$x\in\omega(x,f^n)$，结论获证．

下设 $p>1$．这时 $p<n$，$q<n$．据归纳假设，$x\in R(f^p)$；并把

归纳假设应用于f^p, $x\in R((f^p)^q)=R(f^{pq})=R(f^n)$.

§3 拓扑传递性和拓扑混合性

§3.1 拓扑传递性

设(X, f)为紧致系统.

定义1 f叫作拓扑传递的,如果存在$x\in X$,使得

$$\overline{\mathrm{orb}(x)}=X,$$

即x的轨道在X内处处稠密.

下述命题给出拓扑传递性的几个等价条件, 从不同角度刻划了拓扑传递性这一重要概念. 显然, 它们的每一个都可以作为拓扑传递性的定义.

先回忆拓扑学中一个名词: X的一个子集合叫作G_δ-型集,如果它是X的可数个开集合的交集.

命题1 设$f(X)=X$, 即f是在上的. 则下述条件是等价的:

i) f是拓扑传递的;

ii) 若$A\subset X$闭,且$f(A)\subset A$,则$A=X$或A在X内无处稠密;

iii) 若$E\subset X$开,且$f^{-1}(E)\subset E$, 则$E=\varnothing$或E在X中处处稠密;

iv) 对任意非空开集u、$v\subset X$,存在$n>0$,使

$$f^{-n}(u)\cap v\neq\varnothing;$$

v) 对任意非空开集u、$v\subset X$,存在$n>0$,使

$$f^n(u)\cap v\neq\varnothing;$$

vi) 集合

$$\{x\in X\,|\,\overline{\mathrm{orb}(x)}=X\}$$

是X的一个处处稠密的G_δ-型集.

证明 i$\Rightarrow$ii 设$x\in X$,使得

$$\overline{\mathrm{orb}(x)}=X.$$

又设 $\Lambda\subset X$ 闭且 $f(\Lambda)\subset\Lambda$. 设 Λ 的内集 $\mathring{\Lambda}\neq\varnothing$. 据假设，存在 $p>0$, 使 $f^p(x)\in\mathring{\Lambda}$. 由 $f(X)=X$ 和 $\overline{\mathrm{orb}(x)}=X$, 易于看出

$$\{x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x)\}\cup\Lambda=X.$$

用 f 作用于上式 p 次，得 $\Lambda=X$. 即 Λ 含有内点蕴涵 $\Lambda=X$.

ii $\Rightarrow$ iii　设 $E\subset X$ 开且 $f^{-1}(E)\subset E$. 易见

$$f^{-1}(X-E)\supset X-E$$

或

$$X-E\supset f(X-E).$$

即闭子集 $X-E$ 对 f 不变. 据 ii, $X-E=X$ 或 $X-E$ 在 X 内无处稠密，即 $E=\varnothing$ 或 E 在 X 内处处稠密.

iii $\Rightarrow$ iv　设非空开集 u、$v\subset X$. 显然

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-n}(u)\Big)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-n}(u).$$

据 iii, $\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-n}(u)$ 在 X 内处处稠密. 因此，存在 $n>0$, 使

$$f^{-n}(u)\cap v\neq\varnothing.$$

iv $\Leftrightarrow$ v　设非空开集 u、$v\subset X$. 据 iv, 存在 $n>0$, 使得

$$f^{-n}(v)\cap u\neq\varnothing.$$

但是易于证明

$$f^n(f^{-n}(v)\cap u)=v\cap f^n(u)\neq\varnothing.$$

这就证明了 iv$\Rightarrow$v. 同样可以证明 v$\Rightarrow$iv.

iv $\Rightarrow$ vi　设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的拓扑的一组可数基. 不难看出

$$\{x\in X\mid\overline{\mathrm{orb}(x)}=X\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=0}^{\infty}f^{-m}(u_n).$$

据 iv 易见，对每一个 $n>0$, $\bigcup_{m=0}^{\infty}f^{-m}(u_n)$ 在 X 中处处稠密，因此 vi 成立.

vi $\Rightarrow$ i　明显.

拓扑传递性是动力系统的一个基本概念. 给定一个紧致系统

(X, f)，它不一定是拓扑传递的，但它一定有拓扑传递的子系统；这是因为，据命题1和§2的命题3，对每一个$x\in R(f)$，子系统

$$f|_{\omega(x,f)}:\qquad \omega(x, f)\to\omega(x, f)$$

是拓扑传递的。反过来，(X, f)的每一个拓扑传递的子系统都可以通过这种方式得到。可以直接证明$R(f)\neq\varnothing$，但我们这里不去证明它，而把它当作后面一个命题的推论。

从定义1易于看出，拓扑传递的紧致系统的每一个真子系统的底空间在原系统底空间内都是无处稠密的。

§3.2 拓扑混合性

设(X, f)为紧致系统。

定义 $\begin{cases} f\times f: & X\times X\to X\times X, \\ & (x_1, x_2)\mapsto(f(x_1), f(x_2)), \end{cases}$

其中$X\times X$表示X和自身的拓扑积。易见，$f\times f\in C^0(X\times X)$。

定义2 如果$f\times f$是拓扑传递的，则称f是拓扑弱混合的。

定义3 如果对任意非空开集u、$v\subset X$，存在$N>0$，使得

$$f^n(u)\cap v\neq\varnothing,\qquad \forall n\geqslant N$$

则称f是拓扑强混合的。

据拓扑传递性的定义，f是拓扑弱混合的，相当于对X的任何非空开集u_1、u_2、v_1和v_2，存在$n>0$，使

$$(f\times f)^n(u_1\times v_1)\cap(u_2\times v_2)=(f^n(u_1)\times f^n(v_1))\cap(u_2\times v_2)\neq\varnothing,$$

即 $\qquad f^n(u_1)\cap u_2\neq\varnothing,\qquad f^n(v_1)\cap v_2\neq\varnothing$。

从这里易于看出：

拓扑强混合性⇒拓扑弱混合性

⇒拓扑传递性，

但一般而言，反过来都是不成立的。

与拓扑传递性不同，不但给定紧致系统可以不是拓扑混合的，

它也可以没有拓扑混合的子系统. 最简单的例子是，无理角度旋转的圆周自映射，它本身是拓扑传递的但不是拓扑弱混合的，也没有子系统是拓扑弱混合的.

在一个紧致系统(X, f)中，f 可以看作是底空间 X 上的一个连续作用，每一点 $x\in X$，在 f 作用下变成象点 $f(x)$. 这种作用无限继续下去，就在 X 上引起了一个运动. 不同的作用引起的运动也不同，有的可能复杂些剧烈些，有的可能简单些平缓些. 在某种意义下给这种运动的复杂性或混乱程度一个描述是十分重要和基本的，它将导致在同一底空间上系统的分类. 不同的分类相互比较是动力系统研究的重要一环. 本节引进的三个概念，特别是拓扑弱混合性和拓扑强混合性可以用来描述上述运动的复杂性或混乱程度. 我们将对符号动力系统深入讨论它们.

§4 极小集和几乎周期点

§4.1 极小集和极小映射

设(X, f)为紧致系统.

定义 1 如果

$$\overline{\mathrm{orb}(x)}=X, \qquad \forall x\in X$$

即 X 中每一点的轨道都在 X 内处处稠密，则称 f 是极小映射或 X 是极小集. 这是一个比拓扑传递性更强的概念.

如果子系统

$$f|_A: \quad A\to A$$

是极小的，则说 X 的一个对 f 不变的闭子集 A 是极小的.

下述关于极小集存在性的命题的证明，用到了较为深刻的拓扑学知识，读者可参阅[4].

命题 1 紧致系统(X, f)总存在极小集.

证明 记

$$\mathscr{E}=\{E\subset X\mid \overline{E}=E,\ f(E)\subset E,\ E\neq\varnothing\}.$$

因为 $X\in\mathscr{E}$，故 $\mathscr{E}\neq\varnothing$. 对包含关系，$\mathscr{E}$ 是一个偏序集合. 设

$$\{E_\alpha | \alpha\in\Gamma\}$$

是 $\mathscr{E}$ 的一个线性子集或链，即

$$E_\alpha\subset E_\beta \quad 或 \quad E_\alpha\supset E_\beta, \qquad \forall\alpha,\beta\in\Gamma$$

其中 Γ 是指标集. 据紧致空间的有限交性质，我们有

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha\neq\varnothing.$$

显然，这个非空交集属于 $\mathscr{E}$，且是 $\{E_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$ 的极小元. 据 Zorn 引理，$\mathscr{E}$ 有极小元. 显然，$\mathscr{E}$ 的每一个极小元都是极小集.

推论 $R(f)\neq\varnothing$.

证明 显然，极小集中每一点都是回复点.

命题 2 下述条件等价：

i) f 是极小的；

ii) 若 $\Lambda\subset X$ 闭，且对 f 不变，则 $\Lambda=X$ 或 $\Lambda=\varnothing$.

证明 i ⇒ ii 设 $\Lambda\subset X$ 闭，且对 f 不变. 又设 $x\in\Lambda$. 据极小性定义，

$$X=\overline{\mathrm{orb}(x)}\subset\Lambda,$$

因此，$X=\Lambda$.

ii ⇒ i 设 $x\in X$. 显然 $\overline{\mathrm{orb}(x)}$ 是 X 对 f 不变的非空闭子集. 据 ii，

$$\overline{\mathrm{orb}(x)}=X, \qquad \forall x\in X$$

据定义 1，f 是极小的. □

极小性概念描述了紧致系统在拓扑意义下的不可分解性，即一个极小系统无真子系统.

§4.2 几乎周期点

设 (X, f) 为紧致系统.

定义 2 对于正整数集合 $\{n_i\}$，如果存在整数 $N>0$，使得任意连续 N 个正整数中至少含一个 $\{n_i\}$ 中的元素，则称 $\{n_i\}$ 是相对稠

密的.

定义 3 $x\in X$ 叫作 f 的几乎周期点，如果对任意的 $\varepsilon>0$, 使

$$f^n(x)\in V(x, \varepsilon)$$

成立的 n 构成一个相对稠密的集合.

f 的全体几乎周期点的集合记作 $A(f)$. 易见,

$$P(f)\subset A(f)\subset R(f),$$

且两个包含关系都可以是真包含. 因此, $A(f)$ 是回复性的一个新层次. 另外, 亦有 $f(A(f))\subset A(f)$.

下述命题把几乎周期点与极小集联系在一起.

命题 3 设 $x\in X$. 则 $x\in A(f)$ 当且仅当 $x\in\omega(x, f)$ 且 $\omega(x, f)$ 是极小的.

证明 设 $x\in A(f)$. $x\in R(f)$ 或 $x\in\omega(x, f)$ 是明显的. 假设 $\omega(x, f)$ 不是极小的. 据定义 1, 存在 $y\in\omega(x, f)$, 使

$$\overline{\mathrm{orb}(y)}\subsetneqq\omega(x, f).$$

显然 $x\notin\overline{\mathrm{orb}(y)}$, 否则由 $\overline{\mathrm{orb}(y)}$ 对 f 的不变性和 $\overline{\mathrm{orb}(x)}=\omega(x, f)$, 导致 $\overline{\mathrm{orb}(y)}=\omega(x, f)$, 矛盾.

记 $$2\varepsilon=d(x, \overline{\mathrm{orb}(y)})>0.$$

据定义 3, 存在 $N>0$, 在任意连续 N 个正整数中, 至少有一个 n, 使

$$f^n(x)\in V(x, \varepsilon).$$

据一致连续性, 存在 $\delta>0$, 使

$$z\in X,\ d(x, z)<\delta\Rightarrow d(f^i(x), f^i(z))<\varepsilon,\qquad i=1, 2, \cdots, N$$

设 $l>0$, 使

$$d(f^l(x), y)<\delta.$$

又存在 $0\leqslant h\leqslant N$, 使

$$d(x, f^{l+h}(x))<\varepsilon.$$

于是有

$$d(x, f^h(y))\leqslant d(x, f^{l+h}(x))+d(f^{l+h}(x), f^h(y))<2\varepsilon.$$

这与假设 $2\varepsilon=d(x, \overline{\mathrm{orb}(y)})$ 矛盾. 这就证明了 $\omega(x, f)$ 是极小集.

下设$x\in R(f)$且$\omega(x, f)$是极小的．显然有$x\in\omega(x, f)$．用反证法．假设x不是f的几乎周期点．据定义3，存在$\varepsilon>0$，对每一个$n>0$，存在$q>0$，使

$$f^{q+i}(x)\notin V(x, \varepsilon)\cap\omega(x, f). \qquad i=1, 2, \cdots, n$$

令$f^q(x)=x_n$，则

$$f^i(x_n)\notin V(x, \varepsilon)\cap\omega(x, f). \qquad i=1, 2, \cdots, n$$

明显地，对每一个n，可取

$$x_n\in V(x, \varepsilon)\cap\omega(x, f).$$

不失普遍性，可设

$$\lim_{n\to\infty} x_n=y\in \overline{V(x, \varepsilon)}\cap\omega(a, f).$$

据$\omega(x, f)$的极小性，存在$m>0$，使

$$f^m(y)\in V(x, \varepsilon),$$

因而存在$\delta>0$，使

$$f^m(V(y, \delta))\subset V(x, \varepsilon).$$

显然地，存在$N>0$，使得$N>m$和$x_N\in V(y, \delta)$．于是有

$$f^m(x_N)\in V(x, \varepsilon),$$

与上面关于x_N的假设矛盾．这完成x是f的几乎周期点的证明．

§5　拓扑共轭与半共轭

§5.1　紧致系统的等价分类——拓扑共轭

设(X, f)和(Y, g)都是紧致系统．

定义1　如果存在映上的同胚映射

$$h:\qquad X\to Y,$$

使得

$$hf=gh,$$

则称f和g拓扑共轭，记作$f\simeq g$．即下述图表具有交换性：

$$
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & X \\
\downarrow h & & \downarrow h \\
Y & \xrightarrow[g]{} & Y
\end{array}
$$

这时，称 h 是从 f 到 g 的拓扑共轭.

命题 1 设 $f\simeq g$，则 $f^n\simeq g^n$，$\forall n>0$.

证明 设 $h: X\to Y$ 是从 f 到 g 的拓扑共轭. 我们有

$$hf^2=hff=ghf=g^2h.$$

可以归纳地证明

$$hf^n=g^nh. \qquad \forall n>0$$

即 h 也是从 f^n 到 g^n 的拓扑共轭.

命题 2 设 $f\simeq g$，且 $h: X\to Y$ 是从 f 到 g 的拓扑共轭. 又设 $x\in X$. 若 n_i 为递增序列，使

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x)=x_0\in X,$$

则
$$\lim_{i\to\infty} g^{n_i}(h(x))=y_0\in Y \quad 且 \quad h(x_0)=y_0.$$

证明 由命题 1，易见

$$\lim_{i\to\infty} hf^{n_i}(x)=\lim_{i\to\infty} g^{n_i}(h(x))=h(x_0). \qquad \square$$

推论 假设同命题 2，则

i) $h(F(f))=F(g)$;

ii) $h(P(f))=P(g)$;

iii) $h(A(f))=A(g)$;

iv) $h(R(f))=R(g)$;

v) $h(\Omega(f))=\Omega(g)$.

注意到 $h^{-1}: Y\to X$ 是从 g 到 f 的拓扑共轭，可从定义出发直接验证，这里从略.

两个紧致系统拓扑共轭的必要条件是它们的底空间同胚. 因此，不失普遍性，我们可以只讨论同一底空间上的紧致系统是否拓扑共轭的问题.

命题 3 设 f、g、$q\in C^0(X)$，则

i) $f\simeq f$;

ii) $f\simeq g\Rightarrow g\simeq f$;

iii) $f\simeq g$, $g\simeq q\Rightarrow f\simeq q$.

证明简单，这里从略.

据命题 3，拓扑共轭是 $C^0(X)$上的一个等价关系，它把 $C^0(X)$分成不相交的等价类，同一类的系统彼此拓扑共轭，不同类的系统彼此不拓扑共轭. 在命题 2 的意义下，拓扑共轭保持系统的轨道结构(即在拓扑共轭下，对应点有相同的轨道拓扑结构). 因此，拓扑共轭的系统可以看作是同一系统. 这就是紧致系统的共轭分类. 寻求两个系统拓扑共轭的条件，是一个十分重要而又困难的问题，即使在一维动力系统中，这类成果也不多.

§5.2 拓扑半共轭与极小覆盖

设(X, f)和(Y, g)是两个紧致系统，且

$$f(X)=X, \qquad g(Y)=Y.$$

定义 2 在定义 1 中，如果 $h: X\to Y$ 仅仅是在上连续的，则称 f 与 g 拓扑半共轭，f 叫作 g 的扩充，g 叫作 f 的因子，h 叫作从 f 到 g 的拓扑半共轭.

如上节所述，拓扑共轭的两个紧致系统有完全相同的动力性状，但拓扑半共轭的两个紧致系统，其动力性状却可以大相径庭. 在拓扑半共轭下，扩充(因子)的那些动力性状得以在因子(扩充)中被保持是一个重要问题，而且这个问题的探讨使得拓扑半共轭成为由已知紧致系统来研究未知紧致系统的一个有力工具.

命题 4 设 $h: X\to Y$ 是从 f 到 g 的一个拓扑半共轭. 若 f 是拓扑传递的(拓扑弱混合的，拓扑强混合的)，则 g 也有同样性质.

证明 设 f 拓扑传递. 令 u、$v\subset Y$ 是任意两个非空开集. 显然，$h^{-1}(u)$、$h^{-1}(v)$是 X 的非空开集. 据 §3.1 的命题 1，存在 $n>0$，使

$$\varnothing \neq f^{-n}(h^{-1}(u)) \cap h^{-1}(v)$$
$$= h^{-1}g^{-n}(u) \cap h^{-1}(v) = h^{-1}(g^{-n}(u) \cap v).$$

因此

$$g^{-n}(u) \cap v \neq \varnothing.$$

这就证明了 g 是拓扑传递的.

若 f 是拓扑强混合的，利用上述方法可以证明 g 也是拓扑强混合的.

最后，设 f 拓扑弱混合. 易于验证

$$h \times h: \qquad X \times X \to Y \times Y$$

是从 $f \times f$ 到 $g \times g$ 的一个拓扑半共轭，即

$$(h \times h)(f \times f) = (g \times g)(h \times h).$$

因此，据本命题已经证明的部分，$f \times f$ 的拓扑传递性蕴涵 $g \times g$ 的拓扑传递性. 据 § 3.2 的定义 1，g 是拓扑弱混合的. □

在拓扑半共轭的应用中，更多的是通过已知的因子来研究未知的扩充，因此，因子哪些性质在扩充中得以保持是一个重要问题. 读者或许已经看出，拓扑半共轭是一个很粗糙的概念，例如，任何一个系统都与单点集上的恒同系统拓扑半共轭，这当然是毫无意义的. 这充分说明扩充和因子的动力性状可以相去很远，也给我们的研究带来诸多不便. 作者引进的下述概念可以使得我们在扩充中找到某个子系统，它与因子在性质上更相近(参见[40]).

定义 3 设 $h: X \to Y$ 是从 f 到 g 的一个拓扑半共轭. 子集合 $X_h \subset X$ 叫作 Y 的 h-极小覆盖，如果

i) $\overline{X}_h = X_h$，即 X_h 是闭子集；

ii) $f(X_h) \subset X_h$，即 X_h 对 f 不变；

iii) $h(X_h) = Y$；

iv) X_h 无真子集满足上述 i、ii和 iii.

设 $Y_0 \subset Y$ 闭，且对 g 不变. 易见，$h^{-1}(Y_0) \subset X$ 亦闭，且对 f 不变. 进而，

$$h|_{h^{-1}(Y_0)}: \qquad h^{-1}(Y_0) \to Y_0$$

是从 $f|_{h^{-1}(Y_0)}$ 到 $g|_{Y_0}$ 的拓扑半共轭. Y_0 的 h-极小覆盖是指 Y_0 的 $h|_{h^{-1}(Y_0)}$-极小覆盖.

命题 5 设 $h: X\to Y$ 是从 f 到 g 的拓扑半共轭,则存在 Y 的 h-极小覆盖. 又若 g 是拓扑传递的,则子系统 $f|_{X_h}$ 亦然.

证明 记

$$\mathscr{E}=\{E\subset X\,|\,\overline{E}=E,\ f(E)\subset E \text{ 且 } h(E)=Y\}.$$

易见, $X\in\mathscr{E}$, 故 $\mathscr{E}\neq\varnothing$. 在包含关系下, $\mathscr{E}$ 是一个偏序集合. 设

$$\{E_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$$

是 $\mathscr{E}$ 的一个线性子集或链,其中 Γ 是指标集. 由紧致空间的有限交性质,我们有

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}E_\alpha=E\neq\varnothing.$$

易见 $\overline{E}=E$ 和 $f(E)\subset E$. 下面来证明 $h(E)=Y$.

任取 $y\in Y$. 令

$$h^{-1}(y)\cap E_\alpha=F_\alpha. \qquad \alpha\in\Gamma$$

显然, $\{F_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$亦是 $\mathscr{E}$ 的一个线性子集,且据同样理由,亦有

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha=F\neq\varnothing.$$

显然, $h(F)=\{y\}$和 $F\subset E$, 因而 $y\in h(E)$. 由 $y\in Y$ 的任意性,即得

$$h(E)=Y.$$

以上说明, $\mathscr{E}$ 的每一个线性子集有极小元. 据 Zorn 引理, $\mathscr{E}$ 有极小元. 显然, $\mathscr{E}$ 的每一个极小元都可以取作 X_h(参见[4]).

设 g 是拓扑传递的, 即存在 $y\in Y$, 使得 $\omega(y, g)=Y$. 任取 $x\in X$, 使 $h(x)=y$. 易证

$$h(\omega(x, f))=\omega(y, g),$$

且

$$h|_{\omega(x, f)}:\quad \omega(x, f)\to\omega(y, g)$$

是从 $f|_{\omega(x,f)}$ 到 g 的拓扑半共轭. 令 $X_h\subset\omega(x, f)$是 Y 的 h-极小覆盖. 存在 $x_0\in X_h$, 使 $h(x_0)=y$. 因而

$$h(\omega(x_0, f))=\omega(y, g).$$

由 $\omega(x_0, f)\subset X_h$ 和 X_h 的极小性，得

$$\omega(x_0, f)=X_h,$$

故 $x_0\in\omega(x_0, f)$，因而 $x_0\in R(f)$ 和 $f|_{X_h}$ 是拓扑传递的. □

推论 假设同命题 1. 则

i) $h(A(f))=A(g)$;

ii) $h(R(f))=R(g)$.

证明 i) 从定义出发，易于直接证明 $h(A(f))\subset A(g)$. 下面证明 $h(A(f))\supset A(g)$.

设 $y\in A(g)$. 令 $\Lambda\subset X$ 是 $\omega(y, g)$的 h-极小覆盖. 我们断言 Λ 是极小的. 设若不然，即存在 $x\in\Lambda$, 使得 $\omega(x, f)\subsetneqq\Lambda$. 因 $h(x)\in\omega(y, g)$, 根据 § 4.2 的命题 1, $\omega(y, g)$是极小的，故 $\omega(h(x), g)=\omega(y, g)$. 但是

$$h(\omega(x, f))=\omega(h(x), g),$$

而这与 Λ 是 $\omega(y, g)$的 h-极小覆盖相矛盾. 断言获证，即 Λ 是极小的. 取 $x\in\Lambda$, 使 $h(x)=y$. 据 § 4.2 的命题 1, $x\in A(f)$. 这就证明了 $h(A(f))\supset A(g)$.

ii) 易从定义直接证明 $h(R(f))\subset R(g)$. 下面来证明 $h(R(f))\supset R(g)$.

设 $y\in R(f)$. 令 $\Lambda\subset X$ 是 $\omega(y, g)$的 h-极小覆盖. 取 $x\in\Lambda$, 使 $h(x)=y$. 我们有

$$\omega(x, f)\subset\Lambda \quad 和 \quad h(\omega(x, f))=\omega(y, g).$$

由 Λ 的极小性，有

$$x\in\omega(x, f)=\Lambda;$$

即 $x\in R(f)$. 这就证明了 $h(R(f))\supset R(g)$. □

第 2 章

拓扑熵与混沌

拓扑动力系统是一个古老的数学分支，可上溯到本世纪初叶的庞加莱(H. J. Poincaré)和伯克霍夫(G. D. Birhkoff)的工作.随着近30年来新兴的大型综合性数学分支——近代微分动力系统——大范围结构稳定性理论的建立和发展，出现了两个属于拓扑动力系统范畴(即只依赖于连续性)的新概念，就是拓扑熵与混沌.

拓扑熵的最初定义，由 R.L. Adler、A.G. Konheim 和 M.H. McAndrew 引进[12]，后来 R. Bowen 又给出了新的定义[15]. 它是迄今为止发现的唯一的非负数值拓扑共轭不变量. 每一个紧致系统都有一个确定的拓扑熵，它被认为是连续作用在底空间上引起的运动的混乱程度的一种度量，而估计和计算紧致系统的拓扑熵就成了动力系统的一个永恒的研究课题.

混沌的思想亦可追溯到庞加莱. 他在常微分方程定性理论的研究中发现的同宿轨(homoclinic orbit)事实上已孕育了混沌的萌芽. 而在著名的斯梅尔马蹄中，混沌则已呼之欲出. 在文献中首先使用“混沌”(chaos)一词的是李天岩(T. Y. Li)和约克(J. A. Yorke). 他们的被大量引用的“周期3蕴涵混沌”一文，开启了数学混沌研究的先河[21]. 与此同时，一类被通称“混沌”的复杂现象在包括物理、力学、天文、化学乃至生物等几乎所有自然学科甚至人文学科中被普遍发现，并掀起了一场研究混沌的热潮，历久不衰. 时至今日，人类科学史上没有哪一个概念或理论能与“混沌”相比，把如此众多的学科和领域联系在一起，成为它们的共同语言.

本章讨论拓扑熵与混沌这两个概念、它们之间的关系以及与之相关的问题.

§6 拓扑熵

§6.1 拓扑熵的开覆盖定义

设(X, f)为紧致系统.

用α、β等表示X的开覆盖. 下面引进一些符号和术语，并列出一些简单事实[5].

记
$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B \mid A \in \alpha,\ B \in \beta\},$$
$$f^{-1}(\alpha) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \alpha\}.$$

它们也是X的开覆盖，且有
$$f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}(\alpha) \vee f^{-1}(\beta).$$

又记
$$\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha). \qquad \forall n > 0$$

如果对每一个$B \in \beta$，存在$A \in \alpha$，使得$B \subset A$，则说β是α的加细，记作$\alpha < \beta$.

(1) 显然有$\alpha < \alpha \vee \beta$.

(2) 若β是α的子覆盖，则$\alpha < \beta$.

记$N(\alpha)$为α的子覆盖的基数的下确界. 据X的紧致性，它是一个正整数. 又记
$$H(\alpha) = \log N(\alpha).$$

(3) 显然，$H(\alpha) > 0$.

(4) 易证$H(\alpha) = 0 \Leftrightarrow N(\alpha) = 1 \Leftrightarrow X \in \alpha$.

(5) 易证$\alpha < \beta \Rightarrow H(\alpha) \leqslant H(\beta)$.

(6) 从定义出发，易证$H(\alpha \vee \beta) \leqslant H(\alpha) + H(\beta)$.

(7) 一般，有$H(f^{-1}(\alpha)) \leqslant H(\alpha)$. 当$f(X) = X$时等号成立.

辅助命题 1 设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$为非负实数序列，满足
$$a_{n+p} \leqslant a_n + a_p, \qquad \forall n \geqslant 1,\ p \geqslant 1$$

则
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n}$$

存在，且等于 $\inf \frac{a_n}{n}$.

证明 固定 $p>0$. 每一个 $n>0$ 可写成

$$n=kp+i, \qquad k\geqslant 0,\ 0\leqslant i<p$$

于是有

$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{i+kp}}{i+kp}\leqslant\frac{a_i}{kp}+\frac{a_{kp}}{kp}\leqslant\frac{a_i}{kp}+\frac{ka_p}{kp}=\frac{a_i}{kp}+\frac{a_p}{p}.$$

当 $n\to\infty$ 时，亦有 $k\to\infty$, 故

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{a_p}{p}.$$

这蕴涵

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\inf\frac{a_p}{p}.$$

但是 $\inf\frac{a_p}{p}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\inf\frac{a_n}{n}. \qquad \square$$

命题 1 存在极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\alpha)\right)$.

证明 记

$$a_n=H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\alpha)\right). \qquad \forall n>0$$

据辅助命题 1, 只须证明

$$a_{n+k}\leqslant a_n+a_k. \qquad \forall n\geqslant 1,\ k\geqslant 1$$

据(6)和(7), 有

$$\begin{aligned}a_{n+k}&=H\left(\bigvee_{i=0}^{n+k-1}f^{-i}(\alpha)\right)=H\left(\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\alpha)\right)\vee\left(\bigvee_{j=n}^{n+k-1}f^{-j}(\alpha)\right)\right)\\&\leqslant H\left(\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\alpha)\right)\vee\left(f^{-n}\bigvee_{j=0}^{k-1}f^{-j}(\alpha)\right)\right)\\&\leqslant H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\alpha)\right)+H\left(\bigvee_{j=0}^{k-1}f^{-j}(\alpha)\right)=a_n+a_k.\end{aligned}$$

定义 1

$$\operatorname{ent}(f,\ \alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\alpha)\right)\geqslant 0$$

叫作 f 相对于 α 的拓扑熵.

(8) 不难证明，$\alpha<\beta \Rightarrow \mathrm{ent}(f,\ \alpha) \leqslant \mathrm{ent}(f,\ \beta)$。

定义 2

$$\mathrm{ent}(f)=\sup_{\alpha}\{\mathrm{ent}(f,\ \alpha)\}\geqslant 0$$

叫作 f 的拓扑熵，其中 $\sup\limits_{\alpha}$ 是对所有 X 的开覆盖取上确界. 拓扑熵是一个非负实数，但可以达到 $+\infty$.

定义 2 是拓扑熵的开覆盖定义，它只须底空间是紧致的，而无需可度量化.

§6.2 拓扑熵的 Bowen 定义

拓扑熵的 Bowen 定义适用于底空间是可度量化(无需紧致)，但其上作用为一致连续的系统. 为简单起见，我们只对紧致系统给出定义.

设 $(X,\ f)$ 为紧致系统，d 是 X 的一个拓扑度量. 下面的定义与 X 的拓扑度量选取无关.

设 $n>0$ 和 $\varepsilon>0$.

子集合 $F\subset X$ 叫作 f 的一个 $(n,\ \varepsilon)$-张成集，如果对每一个 $x\in X$，存在 $y\in F$，使得

$$d(f^i(x),\ f^i(y))\leqslant\varepsilon, \qquad i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$$

子集合 $E\subset X$ 叫作 f 的一个 $(n,\ \varepsilon)$-分离集，如果 $x,\ y\in E,\ x\neq y\Rightarrow$ 存在 $0\leqslant i<n$，使

$$d(f^i(x),\ f^i(y))>\varepsilon.$$

定义 3 用 $r_n(\varepsilon,\ X,\ f)$ 表示 f 的 $(n,\ \varepsilon)$-张成集的基数的下确界；用 $S_n(\varepsilon,\ X,\ f)$ 表示 f 的 $(n,\ \varepsilon)$-分离集的基数的上确界.

(1) 据 X 的紧致性，易于看出

$$r_n(\varepsilon,\ X,\ f)<+\infty, \qquad S_n(\varepsilon,\ X,\ f)<+\infty.$$

(2) 易证 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2\Rightarrow r_n(\varepsilon_1,\ X,\ f)\geqslant r_n(\varepsilon_2,\ X,\ f)$，$S_n(\varepsilon_1,\ X,\ f)\geqslant S_n(\varepsilon_2,\ X,\ f)$.

(3) $r_n(\varepsilon,\ X,\ f)\leqslant S_n(\varepsilon,\ X,\ f)\leqslant r_n(\varepsilon/2,\ X,\ f)$.

第一个不等式是明显的，因为具有最大基数的$(n,\ \varepsilon)$-分离集也是$(n,\ \varepsilon)$-张成集. 下设E是f的$(n,\ \varepsilon)$-分离集，F是f的$(n,\ \varepsilon/2)$-张成集. 据定义，对每一个$x\in E$，存在$y\in F$，使得

$$d(f^i(x),\ f^i(y))\leqslant\varepsilon/2, \qquad i=0,\ \cdots,\ n-1$$

不难证明，对E中不同点，对应F中的点也不同. 这证明E的基数不大于F的基数，给出第二个不等式的证明.

定义 4 记

$$r(\varepsilon,\ X,\ f)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\varepsilon,\ X,\ f),$$

$$S(\varepsilon,\ X,\ f)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S_n(\varepsilon,\ X,\ f).$$

(4) 据(2)，$0<\varepsilon_1<\varepsilon_2\Rightarrow r(\varepsilon_1,\ X,\ f)\geqslant r(\varepsilon_2,\ X,\ f)$，$S(\varepsilon_1,\ X,\ f)\geqslant S(\varepsilon_2,\ X,\ f)$.

(5) 据(2)和(3)，有

$$r(\varepsilon,\ X,\ f)\leqslant S(\varepsilon,\ X,\ f)\leqslant r(\varepsilon/2,\ X,\ f).$$

据(5)，我们有

定义 5

$$h(f)=\lim_{\varepsilon\to0}r(\varepsilon,\ X,\ f)=\lim_{\varepsilon\to0}S(\varepsilon,\ X,\ f)$$

叫作f的"在 Bowen 意义下的拓扑熵"(参见[5]).

下面将证明，对紧致系统而言，拓扑熵的开覆盖定义与Bowen定义是一致的，从而也就证明了 Bowen 定义下的拓扑熵与X的拓扑度量选取无关.

§6.3 拓扑熵的基本性质

设$(X,\ f)$为紧致系统，d为X的一个拓扑度量.

先回忆两个概念.

设α为X的一个开覆盖，记

$$\operatorname{diam}(\alpha)=\sup\{d(A)\mid A\in\alpha\},$$

叫作α的直径，其中

$$d(A)=\sup\{d(x, y)\mid x, y\in A\}.$$

α 的勒贝格(H. L. Lebesgue)数是指实数 $\delta>0$，对任意子集 $E\subset X$,

$$d(E)<\delta \Rightarrow \text{存在 } A\in\alpha, \text{使 } E\subset A.$$

拓扑学的一个定理说，紧致可度量空间的每一个开覆盖有正的勒贝格数(见[2]).

命题 2 设 α 是 X 的开覆盖,其勒贝格数为 $\delta>0$, 则

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)\leqslant r_n\left(\frac{\delta}{2}, X, f\right)\leqslant S_n\left(\frac{\delta}{2}, X, f\right). \qquad \forall n>0$$

证明 设 $n>0$ 和 F 是 f 的 $\left(n, \dfrac{\delta}{2}\right)$ 张成集，其基数为 $r_n\left(\dfrac{\delta}{2}, X, f\right)$. 又设 $x\in X$, 并令 $y\in F$, 使

$$d(f^i(x), f^i(y))\leqslant\frac{\delta}{2},$$

等价地,

$$f^i(x)\in \overline{V\left(f^i(y), \frac{\delta}{2}\right)} \quad \text{或} \quad x\in f^{-i}\left(\overline{V\left(f^i(y), \frac{\delta}{2}\right)}\right).$$

$$i=0, \cdots, n-1$$

因此,

$$X\subset\bigcup_{y\in F}\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}\left(\overline{V\left(f^i(y), \frac{\delta}{2}\right)}\right).$$

据勒贝格数的定义,每一个 $\overline{V\left(f^i(y), \dfrac{\delta}{2}\right)}$ 都是 α 的某一个元素的子集,因而 $\bigcap\limits_{i=0}^{n-1} f^i\left(\overline{V\left(f^i(y), \dfrac{\delta}{2}\right)}\right)$ 是 $\bigvee\limits_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)$ 的一个元素的子集. 据定义,我们有

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)\leqslant r_n\left(\frac{\delta}{2}, X, f\right)\leqslant S_n\left(\frac{\delta}{2}, X, f\right). \qquad \forall n>0$$

命题 3 设 $\varepsilon>0$ 和 α 是 X 的一个开覆盖, 且 $\operatorname{diam}(\alpha)\leqslant\varepsilon$, 则

$$r_n(\varepsilon, X, f)\leqslant S_n(\varepsilon, X, f)\leqslant N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right). \qquad \forall n>0$$

证明 设 $n>0$ 和 E 是 f 的(n, ε)-分离集，其基数为 $S_n(\varepsilon,$

$X, f)$. 据直径的定义，$\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)$的每一个元素均不能包含 E 中两个点. 这明显地蕴涵

$$r_n(\varepsilon, X, f) \leqslant S_n(\varepsilon, X, f) \leqslant N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right). \quad \forall n>0 \quad \square$$

命题 4 $\operatorname{ent}(f)=h(f)$. 即拓扑熵的两种定义是等价的.

证明 设 $\varepsilon>0$. 令 α_ε 和 β_ε 分别为 X 的半径为 2ε 和 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的开球构成的开覆盖. 显然，α_ε 有不小于 2ε 的勒贝格数，而 β_ε 的直径不大于 ε. 据命题 2 和命题 3，我们有

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha_\varepsilon)\right) \leqslant r_n(\varepsilon, X, f) \leqslant S_n(\varepsilon, X, f)$$
$$\leqslant N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\beta_\varepsilon)\right). \qquad \forall n>0$$

不难看出，这蕴涵 $\operatorname{ent}(f)=h(f)$. 证毕.

下面是拓扑熵的几个基本性质.

命题 5 $\operatorname{ent}(id)=0$，即恒同映射有零拓扑熵.

无论从拓扑熵的何种定义，都是明显的.

命题 6 $\operatorname{ent}(f^m)=m\cdot\operatorname{ent}(f)$，$\forall m>0$.

证明 利用拓扑熵的 Bowen 定义加以证明. 设 $m>0$，$n>0$ 和 $\varepsilon>0$. 从定义易见，f 的(mn, ε)-张成集是 f^m 的(n, ε)-张成集，即

$$r_n(\varepsilon, X, f^m) \leqslant r_{mn}(\varepsilon, X, f).$$

因此

$$\frac{1}{n}\log r_n(\varepsilon, X, f^m) \leqslant \frac{m}{m\cdot n}\log r_{mn}(\varepsilon, X, f).$$

易见，这蕴涵

$$\operatorname{ent}(f^m) \leqslant m\cdot\operatorname{ent}(f).$$

因为 f 是一致连续的，对 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$x, y\in X, \ d(x, y)<\delta \Rightarrow d(f^i(x), f^i(y))<\varepsilon. \quad i=0, \cdots, m-1$$

易证 f^m 的(n, δ)-张成集是 f 的$(m\cdot n, \varepsilon)$-张成集，即

$$r_n(\delta, X, f^m) \geqslant r_{m\cdot n}(\varepsilon, X, f)$$

或 $$\frac{1}{n}r_n(\delta, X, f^m) \geqslant \frac{m}{m\cdot n} r_{m\cdot n}(\varepsilon, X, f).$$

这蕴涵 $$r_n(\delta, X, f^m) \geqslant m\cdot r(\varepsilon, X, f),$$

因而 $$\mathrm{ent}(f^m) \geqslant m\cdot \mathrm{ent}(f). \qquad \square$$

命题 7 设 $A\subset X$ 闭，且对 f 不变，则

$$\mathrm{ent}(f|_A) \leqslant \mathrm{ent}(f).$$

即子系统的拓扑熵不大于原系统的拓扑熵.

证明 设 A 的所有的开覆盖(由 X 的开集构成)的集合为 Γ. 对每一个 $\alpha\in\Gamma$，记

$$\alpha^* = \{A, X - A \mid A\in\alpha\}.$$

α^* 显然是 X 的开覆盖. 明显地，

$$H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} (f|_A)^{-i}(\alpha)\right) \leqslant H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha^*)\right). \qquad \forall n>0$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{ent}(f|_A) &= \sup_{\alpha\in\Gamma}\{\mathrm{ent}(f|_A, \alpha)\}\\ &\leqslant \sup_{\alpha\in\Gamma}\{\mathrm{ent}(f, \alpha^*)\}\\ &\leqslant \mathrm{ent}(f). \qquad \square\end{aligned}$$

命题 8 $\mathrm{ent}(f) = \mathrm{ent}(f|_{\Omega(f)})$.

这个结果有重要应用，并反映了非游荡集的重要性. 它最初由 Bowen 在 X 是紧致可度量空间时给出证明，但他的证明晦涩难读(见[15]). 后来[27]把它推广到 X 是一般紧致空间的情形，给出一个比较简单的新证明. 下面的证明参见[27]. 我们需先作一些准备.

下面直到命题 8 获证之前，设 X 是紧致拓扑空间，$f: X\to X$ 连续.

设 α 是 X 的一个开覆盖. 对 $k>0$，记

$$k\alpha = \{A_1\cup\cdots\cup A_k \mid A_i\in\alpha,\ i=1, \cdots, k\}.$$

显然，它也是 X 的开覆盖. 下述性质是简单的.

i) $N(\alpha)\leqslant kN(k\alpha)$;

ii) $f^{-1}(k\alpha)=kf^{-1}(\alpha)$;

iii) 若 $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ 都是 X 的开覆盖($n>0$),则

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} k\alpha_i > k^n \bigvee_{i=0}^{n-1} \alpha_i.$$

辅助命题 2 $\text{ent}(f, k\alpha)\geqslant \text{ent}(f, \alpha)-\log k$.

证明 下述推导用到了上面的 i、ii 和 iii.

$$\begin{aligned}
\text{ent}(f, k\alpha) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(k\alpha)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} kf^{-i}(\alpha)\right) \\
&\geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(k^n \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right) \\
&\geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)\Big/k^n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)-\log k \\
&= \text{ent}(f, \alpha)-\log k.
\end{aligned}$$

□

辅助命题 3 若 X 的开覆盖 α 包含元素 $A\supset\Omega(f)$,则

$$\text{ent}(f, \alpha)=0.$$

证明 对每一点 $x\in X-\Omega(f)$,存在 $A_x\in\alpha$,使 $x\in A_x$. 又据非游荡点的定义,存在 x 的邻域 $B_x\subset A_x$,使

$$B_x \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} f^i(B_x)\right)=\varnothing.$$

易见 $\alpha'=\{A\}\cup\{B_x | x\in X-\Omega(f)\}$ 亦是 X 的一个开覆盖,且 $\alpha'>\alpha$. 任取 α' 的有限子覆盖

$$\beta=\{A, B_{x_1}, \cdots, B_{x_l}\}, \qquad l>1$$

由于 $\beta>\alpha$,故只需证明 $\text{ent}(f, \beta)=0$.

对 $n>0$,定义

$$\begin{cases}\xi: \beta^n \to \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\beta), \\ (C_0, \cdots, C_{n-1}) \mapsto \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(C_i).\end{cases}$$

易见，ξ 是在上的. 设$(C_0, \cdots, C_{n-1})\in\beta^n$ 中不是 A 的分量的个数大于 l，则显然存在 $j<j'$，使 $C_j=C_{j'}=B_{x_q}$ 对某个 q 成立. 这时

$$\xi(C_0, \cdots, C_{n-1})=\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(C_i)=\varnothing.$$

因为如不然，则存在

$$x\in\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(C_i)$$

蕴涵 $f^j(x), f^{j'}(x)\in B_{x_q}$，从而

$$B_{x_q}\cap f^{j'-j}(B_{x_q})\neq\varnothing,$$

这与 B_{x_q} 的选取矛盾. 因此 $\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\beta)$ 中非空元素的个数不大于集合 Γ 的基数 $\#\Gamma$，其中 Γ 为由 β^n 中所有满足下述条件的元素 $(C_0, \cdots, C_{n-1})$ 构成，它的分量 C_i 中不同于 A 的个数不大于 l. 明显地，

$$\#\Gamma=\sum_{i=0}^{l}\binom{n}{i}l^i.$$

因此，

$$N\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\beta)\Big)\leqslant n^l\cdot l^{l+1}.$$

于是有

$$\begin{aligned}\operatorname{ent}(f, \beta)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\beta)\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\beta)\Big)\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(l\log n+(l+1)\log l)\\&=0.\end{aligned}$$

□

下面设 α、β 为 X 的开覆盖. 又设 $Y_1\subset Y\subset X$ 均为对 f 不变的闭子集. 记

$$\alpha|Y=\{A\cap Y\mid A\in\alpha\}.$$

易见

iv) $f^{-1}(\alpha)|Y=(f|Y)^{-1}(\alpha|Y)$;

v) $(\alpha\vee\beta)|Y=(\alpha|Y)\vee(\beta|Y)$;

vi) $N(\alpha|Y_1)\leqslant N(\alpha|Y)$.

辅助命题 4 $\operatorname{ent}(f,\alpha)\leqslant H(\alpha|\Omega(f))$.

证明 记

$$k=N(\alpha|\Omega(f)),$$

并设

$$\{A_1\cap\Omega(f),\ \cdots,\ A_k\cap\Omega(f)\}\qquad A_i\in\alpha,\ i=1,\ \cdots,\ k$$

为 $\alpha|\Omega(f)$ 的一个有限子覆盖. 于是,

$$\tilde{\alpha}=\{A_1\cup\cdots\cup A_k\}\cup\alpha$$

是 $k\alpha$ 的子覆盖. 据辅助命题 2~3, 我们有

$$0=\operatorname{ent}(f,\tilde{\alpha})\geqslant\operatorname{ent}(f,\alpha)-\log k.$$

因此,

$$\operatorname{ent}(f,\alpha)\leqslant\log k=H(\alpha|\Omega(f)).\qquad\square$$

命题 8 的证明 设 α 是 X 的任意开覆盖, 并任取整数 $m>0$, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{ent}(f,\alpha)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\alpha)\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m\cdot n}H\Big(\bigvee_{i=0}^{m\cdot n-1}f^{-i}(\alpha)\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m\cdot n}H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1}(f^m)^{-i}\Big(\bigvee_{j=0}^{m-1}f^{-j}(\alpha)\Big)\Big)\\&=\frac{1}{m}\operatorname{ent}\Big(f^m,\ \bigvee_{j=0}^{m-1}f^{-j}(\alpha)\Big).\end{aligned}$$

于是, 据辅助命题 4, 并注意到 $\Omega(f^m)\subset\Omega(f)$, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{ent}(f,\alpha)&\leqslant\frac{1}{m}H\Big(\bigvee_{j=0}^{m-1}f^{-j}(\alpha)|\Omega(f^m)\Big)\\&\leqslant\frac{1}{m}H\Big(\bigvee_{j=0}^{m-1}f^{-j}(\alpha)|\Omega(f)\Big)\\&=\frac{1}{m}H\Big(\bigvee_{j=0}^{m-1}(f|\Omega(f))^{-j}(\alpha|\Omega(f))\Big).\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$, 得

$$\text{ent}(f, \alpha) \leqslant \text{ent}(f|\Omega(f), \alpha|\Omega(f)).$$

因为 α 是任意的，因此

$$\text{ent}(f) \leqslant \text{ent}(f|\Omega(f)).$$

据命题 7，即得

$$\text{ent}(f) = \text{ent}(f|\Omega(f)). \qquad \square$$

命题 9 设 (X, f) 和 (Y, g) 都是紧致系统，且 $h: X \to Y$ 是从 f 到 g 的拓扑半共轭，则

$$\text{ent}(f) \geqslant \text{ent}(g).$$

又，若 h 是从 f 到 g 的拓扑共轭，则

$$\text{ent}(f) = \text{ent}(g),$$

即拓扑熵是拓扑共轭不变量.

证明 利用开覆盖的定义而证明之. 设 α 是 Y 的一个开覆盖. 易见

$$h^{-1}g^{-i} = f^{-i}h^{-1}. \qquad \forall i > 0$$

注意到 § 6.1 中的(7)，我们有

$$\begin{aligned}
\text{ent}(g, \alpha) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} g^{-i}(\alpha)\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\Big(h^{-1} \bigvee_{i=0}^{n-1} g^{-i}(\alpha)\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} h^{-1}g^{-i}(\alpha)\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}h^{-1}(\alpha)\Big) \\
&= \text{ent}(f, h^{-1}(\alpha)).
\end{aligned}$$

当 α 跑遍 Y 的开覆盖时，$h^{-1}(\alpha)$ 仅仅是 X 的部分开覆盖，故上式蕴涵

$$\text{ent}(g) \leqslant \text{ent}(f).$$

当 h 是拓扑共轭时，亦有

$$\text{ent}(f) \leqslant \text{ent}(g).$$

故

$$\text{ent}(f) = \text{ent}(g). \qquad \square$$

拓扑熵概念的引入，给动力系统的研究开辟了一个广泛而又永恒的课题——拓扑熵的估计和计算. 一般而言，拓扑熵被认为是自映射作用在底空间上引起的运动的混乱程度的度量. 熵越大，运动就越剧烈. 但是，熵值大小似乎区别不是本质的，而正熵与零熵才是本质的不同. 因此，寻求拓扑熵为零的充要条件是一件至关重要的事情.

命题 10 设 $f\in C^0(I)$，则 $\mathrm{ent}(f)>0$ 当且仅当 f 有一个非 2 方幂的周期.

这个结果的充分部分是著名的 Bowen-Franks 定理[16]，是最早关于拓扑熵估计的重要结果. 其原始证明远非简单，要用到同调理论. 但可用符号动力系统给出一个简单的证明(见第 3 章). Bowen-Franks 定理的逆被猜测也成立(廖山涛教授称之为"小熵猜测"，以区别于著名的熵猜测)，并引起广泛关注. 本书作者首先给出肯定完整证明，其中涉及过多线段动力系统的专门知识，与本书关系不大，我们不去讨论它的证明细节(参见[29]).

对圆周动力系统，有类似的结果. 再者，对有限型子转移，上述问题也已解决. 将在以后章节中详加论述. 上述问题的一般情形至今仍是开的.

§6.4 拓扑熵的估计与计算

无论从开覆盖定义，还是 Bowen 的定义看，拓扑熵这个概念都过于复杂，人们很难掌握它的几何背景，更无从下手从定义出发直接计算它的值. 这当然给拓扑熵的估计和计算带来极大不便，以致于直到今天，这方面成果，特别是一般性成果很少.

本节主要目的是引进"生成子"概念，使得拓扑熵的计算得以化简. 即从两个极限过程化简成一个极限过程. 生成子概念在我们讨论符号动力系统时将被引用(参见[5]).

设 (X, f) 为紧致系统.

命题 11 设 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一个开覆盖序列，使得

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}\{\alpha_n\}=0,$$

则当 $\operatorname{ent}(f)$ 有限时，

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{ent}(f,\ \alpha_n)=\operatorname{ent}(f);$$

而当 $\operatorname{ent}(f)=+\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{ent}(f,\ \alpha_n)=+\infty.$$

证明 设 $\operatorname{ent}(f)$ 有限，并设 $\varepsilon>0$. 据定义 2，可选取 X 的开覆盖 β，使得

$$\operatorname{ent}(f,\ \beta)>\operatorname{ent}(f)-\varepsilon.$$

设 $\delta>0$ 是 β 的勒贝格数. 选择 $N>0$，使得当 $n\geqslant N$ 时，$\operatorname{diam}\{\alpha_n\}<\delta$. 据勒贝格数的性质，我们有 $\beta<\alpha_n$，因而 $\operatorname{ent}(f,\ \beta)\leqslant\operatorname{ent}(f,\ \alpha_n)$，$\forall n\geqslant N$. 这蕴涵

$$\operatorname{ent}(f)\geqslant\operatorname{ent}(f,\ \alpha_n)\geqslant\operatorname{ent}(f)-\varepsilon. \qquad \forall n\geqslant N$$

因此，
$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{ent}(f,\ \alpha_n)=\operatorname{ent}(f).$$

下设 $\operatorname{ent}(f)=+\infty$. 任意给定 $a>0$，可选取 X 的开覆盖 β，使得 $\operatorname{ent}(f,\ \beta)>a$. 重复上述证明过程，即得

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{ent}(f,\ \alpha_n)=+\infty.$$ □

命题 11 是一个进展，但也很有限. 下面的概念有时更有用.

定义 6 设 α 是 X 的有限开覆盖，如果对 α 的元素的任意序列 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$，交集 $\bigcap_{n=0}^{\infty}f^{-n}(\overline{A}_n)$ 至多包含一个点，则 α 叫做 f 的一个生成子；

如果交集 $\bigcap_{n=0}^{\infty}f^{-n}(A_n)$ 至多包含一个点，则 α 叫作 f 的一个弱生成子.

显然地，f 的生成子也是它的弱生成子.

命题 12 f 有生成子当且仅当它有弱生成子.

证明 只需证明当 f 有弱生成子便也有生成子即可. 设 β 是 f 的一个弱生成子. 不妨设

$$\beta=\{B_1, \cdots, B_l\}. \qquad l\geqslant 1$$

设 $\delta>0$ 是 β 的勒贝格数. 又设

$$\alpha=\{A_1, \cdots, A_j\} \qquad j\geqslant 1$$

是 X 的一个有限开覆盖, 使得

$$\operatorname{diam}(\overline{A}_i)\leqslant\delta. \qquad i=1, 2, \cdots, j$$

设 $\{A_{i_n}\}$ 是 α 的元素的任一个序列. 于是对每一个 $n\geqslant 0$, 存在 $j_n\geqslant 0$, 使得 $\overline{A}_{i_n}\subset B_{j_n}$, 因而

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\overline{A}_{i_n}) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(B_{j_n}).$$

上式中右端至多含一个点, 故左端亦然. 所以 α 是 f 的一个生成子. □

命题 13 设 α 是 f 的一个生成子, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得开覆盖 $\bigvee_{n=0}^{N} f^{-n}(\alpha)$ 的直径小于 ε. 反之, 对每一个 $N>0$, 存在 $\varepsilon>0$, 使得 x、$y\in X$, $d(x, y)<\varepsilon$ 蕴涵存在 $A_1, \cdots, A_n\in\alpha$, 满足

$$x、y\in\bigcap_{n=0}^{N} f^{-n}(A_n).$$

证明 用反证法证明命题的前半部分. 设结论不成立. 存在 $\varepsilon>0$, 对每一个 $j>0$, 存在 x_j、$y_j\in X$, $d(x_j, y_j)>\varepsilon$, α 有元素 $A_{j,i}$, $0\leqslant i<j$, 满足

$$x_j, y_j\in\bigcap_{i=0}^{j} f^{-i}(\overline{A}_{j,i}).$$

由 X 的紧致性, 存在子序列 $\{j_k\}$, 使得

$$x_{j_k}\to x, \qquad y_{j_k}\to y.$$

显然 $x\neq y$. 考虑 α 的元素 $A_{j_k,0}$. 因为 α 是有限的, 故可设

$$x_{j_k}, y_{j_k}\in A_0\in\alpha. \qquad \forall k\geqslant 0$$

这蕴涵

$$x, y\in\overline{A}_0.$$

同理, 对任意 $0\leqslant n\leqslant j$, 可设

$$x_{j_k}, y_{j_k}\in f^{-n}(\overline{A}_n),$$

其中 $A_n\in\alpha$. 于是

$$x, y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\overline{A}_n).$$

这与 α 是生成子矛盾．命题前半部分获证．

下面证明命题的后半部分．设 $N>0$ 已给定．令 $\delta>0$ 是 X 的开覆盖 α 的勒贝格数．据 f 的一致连续性，可选择 $\varepsilon>0$，使得

$$x, y\in X, d(x, y)<\varepsilon \Rightarrow d(f^i(x), f^i(y))<\delta, \qquad i=0, \cdots, N$$

因此，如果 $d(x, y)<\varepsilon$，则存在 $A_i\in\alpha$，使得

$$f^i(x), f^i(y)\in A_i, \qquad i=0, 1, \cdots, N$$

即

$$x, y\in\bigcap_{i=0}^{N} f^{-i}(A_i).$$

命题的后半部亦获证． □

下面的命题在讨论符号动力系统时有重要应用．

命题 14 设 α 是 f 的一个生成子，则

$$\mathrm{ent}(f)=\mathrm{ent}(f, \alpha).$$

证明 设 β 是 X 的一个开覆盖，其勒贝格数为 $\delta>0$．据命题 13，存在 $N>0$，使得 $\bigvee_{n=0}^{N} f^{-n}(\alpha)$ 的直径小于 $\delta>0$．显然，

$$\beta<\bigvee_{n=0}^{N} f^{-n}(\alpha).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{ent}(f, \beta) &\leqslant \mathrm{ent}\Big(f, \bigvee_{n=0}^{N} f^{-n}(\alpha)\Big) \\
&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}H\Big(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}\Big(\bigvee_{n=0}^{N} f^{-n}(\alpha)\Big)\Big) \\
&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}H\Big(\bigvee_{n=0}^{N+k-1} f^{-n}(\alpha)\Big) \\
&=\lim_{k\to\infty}\frac{N+k-1}{k}\cdot\frac{1}{N+k-1}H\Big(\bigvee_{n=0}^{N+k-1} f^{-n}(\alpha)\Big) \\
&=\mathrm{ent}(f, \alpha).
\end{aligned}$$

即对 X 的任意开覆盖 β，恒有

$$\mathrm{ent}(f, \beta)\leqslant\mathrm{ent}(f, \alpha).$$

这明显地蕴涵

$$\mathrm{ent}(f)=\mathrm{ent}(f,\ \alpha).$$ □

为了讨论符号动力系统时的应用，我们还需引进下述概念.

定义 7 如果存在 $\delta>0$，使得 x、$y\in X$，$x\neq y$ 蕴涵存在 $n>0$，满足

$$d(f^n(x),\ f^n(y))>\delta,$$

则 f 叫作扩张的，δ 叫作 f 的扩张常数.

命题 15 f 是扩张的，当且仅当 f 有生成子.

证明 设 $\delta>0$ 是 f 的扩张常数. 令 α 是 X 的一个由半径为 $\delta/2$ 的开球构成的有限开覆盖. 设 $\{A_n\}$ 是 α 的一个序列，且 x、$y\in X$，使

$$x、y\in\bigcap_{n=0}^{\infty}f^{-n}(A_n).$$

于是

$$d(f^n(x),\ f^n(y))\leqslant\delta.\qquad\forall n\geqslant 0$$

据扩张映射的定义 7，我们有 $x=y$. 这说明 α 是 f 的生成子.

反过来，设 α 是 f 的一个生成子. 设 $\delta>0$ 是 α 的勒贝格数. 如果 x、$y\in X$ 满足

$$d(f^n(x),\ f^n(y))\leqslant\delta,\ \forall n\geqslant 0$$

则存在 $A_n\in\alpha$，使得 $f^n(x)$，$f^n(y)\in A_n$，$\forall n\geqslant 0$，因而

$$x、y\in\bigcap_{n=0}^{\infty}f^{-n}(A_n).$$

据生成子的定义 6，有 $x=y$. 这就证明了 f 是扩张的. □

下面给出两个拓扑熵估计和计算的例子.

命题 16 设 $f\in C^0(I)$. 则 f 是自同胚映射蕴涵 $\mathrm{ent}(f)=0$.

证明 设

$$f:\qquad I\to I$$

是自同胚. 显然 f 必是单调的，且

$$f(0)=0,\qquad f(1)=1$$

或

$$f(0)=1,\qquad f(1)=0.$$

无论哪种情形，f^2 都是严格单调递升的. 容易证明 $\Omega(f^2)=F(f^2)$，

即 f^2 的非游荡集等于它的不动点集. 据命题5、命题6 和命题8,得

$$\operatorname{ent}(f)=\frac{1}{2}\operatorname{ent}(f^2)=\frac{1}{2}\operatorname{ent}(f^2|\Omega(f^2))$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{ent}(f^2|F(f^2))=0. \qquad \square$$

命题 17 设 $f\in C^0(S^1)$, 则 f 是自同胚映射蕴涵 $\operatorname{ent}(f)=0$.

证明 不妨设 S^1 的周长为 1. 取充分小的 $\varepsilon>0$. 易见 S^1 上平均分布的 $[1/\varepsilon]+1$ 个点,相邻两点的距离(弧长)不大于 ε, 其中 $[1/\varepsilon]$ 表示 $1/\varepsilon$ 的整数部分. 因此 $(1, \varepsilon)$-张成集的最小基数

$$r_1(\varepsilon, S^1, f)\leqslant[1/\varepsilon]+1.$$

下面设 $n>1$, 且

$$r_{n-1}(\varepsilon, S^1, f)\leqslant(n-1)([1/\varepsilon]+1)$$

已获证,我们归纳地证明

$$r_n(\varepsilon, S^1, f)\leqslant n([1/\varepsilon]+1).$$

令 F 是具有最小基数的 $(n-1, \varepsilon)$-张成集. 在集合 $f^{n-1}(F)$ 中加进若干点,使得所得集合中相邻两点的距离不大于 ε. 显然,至多加进去 $[1/\varepsilon]+1$ 个点即可. 不难看出,这个新集合即是一个 (n, ε)-张成集,其基数不超过

$$(n-1)([1/\varepsilon]+1)+[1/\varepsilon]+1=n([1/\varepsilon]+1),$$

即
$$r_n(\varepsilon, S^1, f)\leqslant n([1/\varepsilon]+1).$$

据归纳法,上式对一切 $n>0$ 成立. 这明显地蕴涵

$$r(\varepsilon, S^1, f)=0.$$

因此

$$\operatorname{ent}(f)=0. \qquad \square$$

§7 混　　沌

§7.1 两个重要定理

1964 年乌克兰数学家沙尔可夫斯基(A. H. Шарковский)证明

了一个关于一元函数的周期蕴涵关系的定理，即以他的名字命名的定理. 这个定理引发了一维动力系统的蓬勃研究与发展，并历三十年至今而无衰歇迹象. 这个结果与引发混沌研究的李-约克定理有密切关系，所以我们先从这个定理谈起. 为此，我们先作一些准备.

我们把全体正整数按如下方式排列成一个无穷加边方阵:

第一行是从3开始的全体奇数按递增顺序由左向右排列，以下每一行的元素都是前一行相应元素乘以2，这样得到了一个无穷方阵，包括全部非2方幂的正整数；在这个无穷方阵的下面再加上一行，其元素是从$2^0=1$起2的方幂数按递增顺序从右向左排列. 这样得到一个无穷加边方阵，其元素包括了全部正整数. 这方阵称之为"S方阵":

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & \cdots & 2k+1 & \cdots\cdots \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 5 & 2\cdot 7 & \cdots & 2(2k+1) & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 2^n\cdot 3 & 2^n\cdot 5 & 2^n\cdot 7 & \cdots & 2^n(2k+1) & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots\cdots \end{pmatrix} \\ (\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 2^n \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 2 \quad 1)\right)$$

定义1 设m和n是两个不同正整数. 如果

i）当它们位于S方阵的同一行时，m在n的左面，即m和n的行标相同，但m的列标小于n的列标；

ii）当它们不在S方阵的同一行时，m所在行位于n所在行的上面，即m的行标小于n的行标，

这时，我们称m在n之前，或n在m之后，记作$m\prec n$.

全体正整数的这个新排列，称作沙尔可夫斯基新序.

定理1（沙尔可夫斯基） 设$f\in C^0(I)$，m和n是不同的正整数，则f有周期m和$m\prec n$，蕴涵f有周期n（见[22]）.

这个定理是1964年用俄文发表的，被束之高阁长达13年之久，不为外人所知. 直到1977年斯捷凡(P. Stefan)纠正原文若

干不妥之处，用英文重新介绍出来为止[24]. 这个定理是如此受重视，以致于到目前为止已有不同证明达七八个之多. 这里我们不去证明它，有兴趣的读者可参阅有关文献.

这个结果的重要性是不言而喻的，它揭示了自牛顿以来被研究不下三百余年的一元连续函数的一个奇妙、深刻但也很初等的性质. 奇怪的是，这么一个重要又并不高深莫测的有趣性质竟被前辈大师所忽略，而留给今人去发现!

下面是有关沙尔可夫斯基定理的几点重要说明.

1. f 有周期 3, 则 f 有所有正整数的周期. 这个性质特别指出是因为它与下面将要介绍的李-约克定理有关.

2. 当 $P(f)$ 有限，或 f 的周期有限时，f 的周期由 $\{2^n, 2^{n-1}, \cdots, 1\}$ 构成，其中 $n\geqslant 0$.

3. 当 f 的周期无限时，有两种情形：f 有且只有全部 2 的方幂数周期，或 f 有非 2 方幂的周期. 这两种情形均可实现.

4. 对任意 $n>0$, 可以构造 $f\in C^0(I)$, 使 f 有周期 n, 但无周期 m, 其中 $m<n$. 特别地，可以构造 $f\in C^0(I)$, 使 f 的周期为 $\{2^n, 2^{n-1}, \cdots, 1\}$.

5. 按沙尔可夫斯基定理，$C^0(I)$ 可以被分成两大类：有非 2 方幂周期的被归作一类，余者归作另一类.

据命题 10, $\mathrm{ent}(f)>0$ 当且仅当 f 属于前一类.

6. 在整数的沙尔可夫斯基新序中，每一个 $f\in C^0(I)$ 都有一个最小周期，对应这个周期的轨道称为 f 的极小轨道. 极小轨道的研究是一维动力系统的一个重要内容.

此外，沙尔可夫斯基定理也在各个方向上得到推广. 特别值得指出的是，它可以很容易推广到圆周动力系统上去；但有一个重大不同，就是圆周动力系统在有非 2 方幂周期点的情况可以没有 2 周期，等等. 这些内容不在本书讨论范围，有兴趣读者可以参阅有关文献.

定理 2 (李-约克) 设 $f\in C^0(I)$. 若存在 $a\in I$, 使得

$$f^3(a) \leqslant a < f(a) < f^2(a) \quad 或 \quad f^3(a) \geqslant a > f(a) > f^2(a),$$

则

1) f 存在所有正整数周期;

2) 存在不可数集合 $S \subset I - P(f)$，满足

i) $\limsup\limits_{n \to \infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0, \ \forall x, y \in S, x \neq y,$

ii) $\liminf\limits_{n \to \infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0, \ \forall x, y \in S,$

iii) $\limsup\limits_{n \to \infty} |f^n(x) - f^n(p)| > 0, \ \forall x \in S, \ \forall p \in P(f),$

其中 iii)说明 S 中不含 f 的渐近周期点.

在证明这个定理之前，先证明四个引理.

引理 1 设 $f \in C^0(I)$. 若闭线段 $I_1 \subset I$，使 $f(I_1) \supset I_1$，则存在闭线段 $I_2 \subset I_1$，使 $f(I_2) = I_1$；但对任意闭线段 $I_3 \subsetneqq I_2$，有 $f(I_3) \subsetneqq I_1$.

这个引理的几何直观非常清楚，证明亦属初等，从略.

引理 2 设 $f \in C^0(I)$. 又设 $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是闭线段序列，满足

$$I_n \subset I, \qquad f(I_n) \supset I_{n+1}, \qquad \forall n \geqslant 0$$

则存在闭线段序列 $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$，满足

$$Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0, \qquad f^n(Q_n) = I_n,$$

且

$$x \in Q = \bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n \Rightarrow f^n(x) \in I_n. \qquad \forall n \geqslant 0$$

(注意，Q 是单点集或闭线段.)

证明 令 $Q_0 = I_0$，下面反复应用引理 1. 存在 $Q_1 \subset Q_0$，使 $f(Q_1) = I_1$. 存在 $I_1' \subset I_1$，使 $f(I_1') = I_2$. 存在 $Q_2 \subset Q_1$，使 $f(Q_2) = I_1'$，因而 $f^2(Q_2) = I_2$. 归纳地，设对 $n > 2$，$Q_n \subset I_0$，使 $f^n(Q_n) = I_n$ 已定义. 据假设，存在 $I_n' \subset I_n$，使 $f(I_n') = I_{n+1}$. 存在 $Q_{n+1} \subset Q_n$，使 $f^n(Q_{n+1}) = I'$，因而 $f^{n+1}(Q_{n+1}) = I_{n+1}$. 归纳步骤完成，满足要求的 $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ 已获证明存在.

又，$\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} Q_n$ 明显地是单点集或闭线段. 而

$$x\in Q=\bigcap_{n=0}^{\infty}Q_n\Rightarrow f^n(x)\in I_n \qquad \forall n\geqslant 0$$

也是显然的. 证毕.

设实数 $r>0$, 记 $[r]$ 为 r 的整数部分.

引理 3 $0\leqslant[(l+1)r]-[lr]\leqslant 1$, $\forall r\in(0, 1)$, $\forall$ 整数 $l\geqslant 0$.

引理 4

$$\lim_{l\to\infty}\frac{[lr]}{l}=r. \qquad \forall r\in(0, 1)$$

这两个引理的证明都很简单, 这里从略.

定理 2 的证明 设存在 $a\in I$, 使

$$f^3(a)\leqslant a<f(a)=b<f^2(a)=c.$$

记 $K_0=[a, b]$, $K_1=[b, c]$. 显然

$$f(K_0)\supset K_1, \qquad f(K_1)\supset K_0\cup K_1.$$

i) f 有不动点是明显的. 设 $k>1$. 下面证明 f 有 k-周期点. 构造 I 的闭线段序列 $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$, 使得

$$\begin{cases}I_n=K_1, & n=0, 1, \cdots, k-2;\\ I_{k-1}=K_0, & \\ I_{k+n}=I_n, & n=0, 1, \cdots.\end{cases}$$

易见 $\{I_n\}$ 满足引理 2 的条件, 因而存在闭线段序列 $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$, 使得

$$Q_{n+1}\subset Q_n\subset K_1, \qquad f^n(Q_n)=I_n. \qquad \forall n\geqslant 0$$

特别地, $f^k(Q_k)=I_k=K_1=Q_0$. 因此, 在 Q_k 上存在 f^k 的不动点 p_k. 下面证明 p_k 的周期为 k. 因为

$$p_k\in K_1=Q_k\subset Q_{k-1}\subset Q_0,$$

故

$$f^{k-1}(p_k)\in f^{k-1}(Q_{k-1})=I_{k-1}=K_0(k>2).$$

容易看出, 当 p_k 的周期小于 k 时,

$$f^{k-1}(p_k)\in K_0\cap K_1 \quad 或 \quad f^{k-1}(p_k)=b.$$

但这与 $f^{k+1}(p_k)\in K_1$ 矛盾. 这就证明了当 $k>2$ 时 p_k 的周期为 k. 当 $k=2$ 时, p_k 必是 f 的 2-周期点, 否则 p_k 是 f 的不动点, 亦导

致 $p_k=b$ 的矛盾.

ii) 由 $f(K_0)\supset K_1$, $f(K_1)\supset K_0\cup K_1$, 易见

$$f^2(K_0)\cap f^2(K_1)\supset K_0\cup K_1.$$

据引理 1, 易见存在闭线段

$$I_0\subset K_0,\qquad I_1\subset K_1,$$

使 $$I_0\cap I_1=\varnothing,\quad f^2(I_0)=K_0,\quad f^2(I_1)=K_1.$$

于是,

$$f^4(I_0)\cap f^4(I_1)\supset K_0\cup K_1\supset I_0\cup I_1.$$

令 $g=f^4$. 下面证明对 g 存在不可数集合 $S\subset I$, 满足定理中的 (2). 显然, S 对 f 亦满足定理中的 (2), 即 S 是 f 的混沌集.

记 $$I_0=[\underline{m}_0,\ \overline{m}_0],\qquad I_1=[\underline{m}_1,\ \overline{m}_1].$$

$$0\leqslant\underline{m}_0<\overline{m}_0<\underline{m}_1<\overline{m}_1\leqslant 1$$

据引理 1, 存在 $\underline{m}_1\leqslant a_0<b_0<\overline{m}_1$, 使

$$g((a_0,\ b_0))=(\underline{m}_1,\ \overline{m}_1),\quad g(a_0)=\underline{m}_1,\quad g(b_0)=\overline{m}_1.$$

(或 $g(a_0)=\overline{m}_1$, $g(b_0)=\underline{m}_1$, 但此时用 g^2 代替 g 又归结为前一种情形而对证明无影响.) 又, 存在 $s\in I_1$, 使

$$g(s)\leqslant\underline{m}_0,\qquad s<a_0\quad 或\quad s>b_0.$$

下面不妨设 $s<a_0$.

由引理 1, 可以用归纳法去证明: 存在

$$[a_0,\ b_0]\supset[a_1,\ b_1]\supset\cdots\supset[a_n,\ b_n]\supset\cdots,$$

使得

$$g((a_n,\ b_n))=(a_{n-1},\ b_{n-1}),\ g(a_n)=a_{n-1},\ g(b_n)=b_{n-1}.\quad \forall n>0$$

记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a^*\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b^*$. 易见

$$g(a^*)=a^*,\qquad g(b^*)=b^*,$$

且 $[a^*,\ b^*]$ 对 f 不变(当 $a^*=b^*$ 时, $[a^*,\ b^*]$ 退化成不动点). 因为 $g(s)\leqslant\underline{m}_0$, 故

$$g([b,\ a^*])\supset I_0.$$

记 $E=\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为闭线段序列, 其中 $M_n\subseteq K_0$ 或 $M_n\subseteq K_1$, $\forall n\geqslant 0$.

记全体这样的 E 的集合为 $\mathscr{E}$. 设 $E\in\mathscr{E}$. 对 $l\geqslant 0$, 记

$$P(E,\ l)=\mathrm{Card}(\{M_n\in E\mid M_n\subseteq I_0,\ n=0,\ 1,\ \cdots,\ l\}).$$

对每一个实数 $r\in(0,\ 1)$, 构造 $E^r\in\mathscr{E}$, 满足

$$\lim_{l\to\infty}\frac{P(E^r,\ l^2)}{l}=r. \qquad (*)$$

这样的 E^r 存在, 但不一定唯一. 下面用归纳法来具体构造一个.

设 $l_0>0$ 是使 $[l_0r]=1$ 的最小正整数. 记

$$E^r_{l_0^2}=\{M^r_0,\ \cdots,\ M^r_{l_0^2}\},$$

使

$$M^r_i=\begin{cases}I_1, & \text{当 } 0\leqslant i<l_0^2 \text{ 时;}\\ I_0, & \text{当 } i=l_0^2 \text{ 时.}\end{cases}$$

设对 $l>l_0$,

$$E^r_{l^2}=\{M^r_0,\ \cdots,\ M^r_{l^2}\}$$

已有定义. 令

$$E^r_{(l+1)^2}=\{M^r_0,\ \cdots,\ M^r_{(l+1)^2}\},$$

使其前 l^2+1 项与 $E^r_{l^2}$ 的项对应相等, 而

$$M^r_{l^2+j}=\begin{cases}[a_{2l-1-j},\ a^*], & \text{当 } j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2l-1 \text{ 时;}\\ [m_1,\ a^*], & \text{当 } j=2l \text{ 时,}\end{cases}$$

$$M^r_{(l+1)^2}=\begin{cases}I_0, & \text{当 } [(l+1)r]-[lr]=1 \text{ 时;}\\ M^r_{l^2+2l}, & \text{当 } [(l+1)r]-[lr]=0 \text{ 时.}\end{cases}$$

归纳步骤完成, 我们得到

$$E^r=\{M^r_n\}_{n=0}^{\infty}\in\mathscr{E}.$$

从上述构造和引理 3, 易于归纳证明

$$P(E^r,\ l^2)=[lr]. \qquad \forall l>0$$

再据引理 4, 得

$$\lim_{l\to\infty}\frac{P(E^r,\ l^2)}{l}=\lim_{l\to\infty}\frac{[lr]}{l}=r.$$

即 E^r 满足要求, 而且引理 1 亦得到满足. 因此, 存在闭线段序列 $\{Q^r_n\}_{n=0}^{\infty}$, 满足

$$Q^r_{n+1}\subset Q^r_n,\qquad g^n(Q^r_n)=M^r_n,$$

$$x^r\in Q^r=\bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n^r \Rightarrow g(x^r)\in M_n^r, \qquad \forall n\geqslant 0$$

下设 $0<r_1<r_2<1$，易证存在 $l>0$，使得

$$[(l+1)r_1]-[lr_1]\neq[(l+1)r_2]-[lr_2].$$

从上述 E^r 的构造，容易看出

$$M^{r_1}_{(l+1)^2}\cap M^{r_2}_{(l+1)^2}=\varnothing.$$

这蕴涵 $Q^{r_1}\cap Q^{r_2}=\varnothing$. 因此，至多有可数个 $r\in(0, 1)$，使得 Q^r 不是单点集. 记

$$S=\{x^r\in I\mid r\in(0, 1)\text{且} Q^r \text{是单点集}\}.$$

S 是一个不可数集合，其中不含 g 的周期点. 下面证明 S 对 g 满足定理 2 中的(2).

（i）设 x^{r_1}、$x^{r_2}\in S$，$0<r_1<r_2<1$. 由(*)式易见，存在

$$l_1<l_2<\cdots<l_n<\cdots,$$

使得 $\quad [(l_n+1)r_1]-[l_nr_1]\neq[(l_n+1)r_2]-[l_nr_2]. \qquad \forall n>0$

这蕴涵 $\quad |g^{(l_n+1)^2}(x^{r_1})-g^{(l_n+1)^2}(x^{r_2})|\geqslant d(I_0, I_1)>0. \qquad \forall n>0$

因此 $\quad \limsup_{n\to\infty}|g^n(x^{r_1})-g^n(x^{r_2})|\geqslant d(I_0, I_1)>0.$

（ii）设 x^{r_1}、$x^{r_2}\in S$，$0<r_1\leqslant r_2<1$. 据上述 E^r 的构造，有

$$M^{r_1}_{l^2+1}=M^{r_2}_{l^2+1}=[a_{2l-1-j}, a^*]. \qquad j=1, 2, \cdots, 2l-1$$

故

$$g^{l^2+1}(x^{r_1}), g^{l^2+1}(x^{r_2})\in[a_{2l-2}, a^*].$$

因此

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}|g^n(x^{r_1})-g^n(x^{r_2})|&\leqslant\lim_{l\to\infty}|g^{l^2+1}(x^{r_1})-g^{l^2+1}(x^{r_2})|\\&\leqslant\lim(a^*-a_{2l-2})=0.\end{aligned}$$

(iii) 设 $x^r\in S$，$0<r<1$. 因为

$$g^n(x^r)\in M_n^r, \qquad \forall n\geqslant 0$$

易见，存在无限多个 n，使

$$g^n(x^r)\in I_0;$$

也存在无限多个 n，使

$$g^n(x^r) \in I_1.$$

这明显蕴涵 x^r 不是 g 的渐近周期点，即

$$\lim_{n\to\infty} \sup |g^n(x) - g^n(p)| > 0. \qquad \forall x \in S, \forall p \in P(g)$$

(iii)亦获证．至此，定理 2 证毕．

§7.2 李-约克混沌

定理 2 为混沌的定义提供了蓝本．但它的结论太强，不能完全采用它作为混沌的定义．尚需作适当修改．为此，下面对定理 2 作一些分析．

1．定理 2 的(1)是沙尔可夫斯基定理的特款．

“存在所有正整数周期”这样一个事实，就足以说明系统是相当复杂的；但作为混沌的定义，加以要求则过苛，因为那将把一大批复杂系统排斥在混沌系统之外，显然是不适当的．例如，有正拓扑熵的极小系统(这样的系统是存在的[20])，将都不是混沌系统．

2．满足定理 2 中的(2)的不可数集合 S，一般称作混沌集．其中 i 和 ii 的条件是本质的，反映了轨道结构的复杂特征：不可数多的点，在同步迭代下，若离若即，飘忽不定，时而聚拢，时而分离．在直观上，只要有这种情况出现，就足可说明系统的轨道结构非常复杂．不过，这种情况也可能是假象，还须作进一步探讨．

定理 2 的(2)中的 iii，说明 S 中无渐近周期点．但这个结论不是独立的，而是蕴涵在 i 和 ii 之中．我们有下述一般性结果．

命题 1 设(X, f)为紧致系统，d 是 X 的一个拓扑度量．若 $X_0 \subset X$ 满足

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup d(f^n(x), f^n(y)) > 0$, $\forall x, y \in X_0$, $x \neq y$,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf d(f^n(x), f^n(y)) = 0$, $\forall x, y \in X_0$,

则 X_0 内至多含 f 的一个渐近周期点．

证明 设 x、$y \in X_0$ 是 f 的两个渐近周期点，彼此不相等．先设存在 $p \in P(f)$，使

$$\lim d(f^n(x), f^n(p))=0, \qquad \lim_{n\to\infty} d(f^n(y), f^n(p))=0.$$

显然 $$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y))=0,$$

与假设矛盾.

下设存在 p、$q\in P(f)$，$p\neq q$(但对某个 $i>1$，可以有 $f^i(p)=q$，但 i 不是 p 的周期)，使

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p))=0, \qquad \lim_{n\to\infty} d(f^n(y), f^n(q))=0.$$

记 $$\varepsilon=\min\{d(u, v)\mid u, v\in \mathrm{orb}(p)\cup \mathrm{orb}(q), u\neq v\}.$$

显然 $\varepsilon>0$. 容易看出，

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y))\geqslant\varepsilon>0.$$

这又导致矛盾. □

因此，在 S 中至多去掉一点，iii 就成了 i 和 ii 的推论.

3．我们说过，动力系统的核心问题是轨道的渐近性质或拓扑结构，但只有那些具有某种回复性的点的轨道才是重要的. 李-约克定理的一个不足之处是它没有指出 S 的构成与回复性的关系. 但是，在定理 2 的证明中，只要略加修改补充，即可得下述

命题 2 在命题 1 的假设条件下，存在全由非游荡点组成的不可数混沌集.

这个命题的证明这里从略，有兴趣的读者可参阅[28].

根据上面的讨论，一个合理的混沌定义不应对周期性有任何要求，并把混沌的组成与回复性联系起来. 我们提出

定义 2 设(X, f)是紧致系统，d 是 X 的一个拓扑度量. 设 $X_0\subset X$ 非空. 如果存在不可数集合 $S\subset X_0$，满足

i) $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y))>0$, $\forall x, y\in S, x\neq y$,

ii) $\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y))=0$, $\forall x, y\in S$,

我们说 f 在 X_0 上是在李-约克意义下混沌的. 这里的 S 亦称作"f 的混沌集"，S 中不同两点称作"f 的混沌点偶".

"f 在 X 上混沌"简称 f 混沌.

定义 2 中的 i 可换成

i′) 存在 $\delta>0$, 使得

$$\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x),\ f^n(y))>\delta, \qquad \forall x, y\in S,\ x\neq y$$

下面给出简单证明. 设 $S\subset X_0$ 满足 i. 我们断言, 存在不可数子集 $S'\subset S$ 和 $\delta>0$, 使 i′ 成立. 用反证法. 设若不然, 则集合

$$E_m=\left\{x,\ y\in S \mid \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x),\ f^n(y))>\frac{1}{m}\right\}$$

对所有的 $m>0$ 都是可数的, 因而集合 $S=\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ 也是可数的, 矛盾. 断言获证. 用 S' 代替 S, 则 i′ 和 ii 成立.

命题 2 的说明: 在定理 2 的假设条件下, f 在 $\Omega(f)$ 上是混沌的. 存在 $f\in C^0(I)$, 它在 I 上混沌但在 $\Omega(f)$ 上非混沌[17]. 但是我们有下述

命题 3 设 $f\in C^0(I)$, 则 f 在 $\Omega(f)$ 上混沌当且仅当

$$\mathrm{ent}(f)>0.$$

这个命题的证明需要较多线段自映射的知识, 超出了本书讨论范围, 这里从略. 有兴趣的读者, 可参阅[30].

值得一提的是, 命题 3 在一般情形下不成立. 这是一个构造反例的问题, 我们留待讨论符号动力系统时再行处理.

在定义 1 的意义下, 李-约克定理有如下的推广.

命题 4 (Oono) 设 $f\in C^0(I)$, 则 f 有非 2 方幂周期, 蕴涵 f 在 $\Omega(f)$ 上混沌.

它是沙尔可夫斯基定理与李-约克定理的一个简单推论. 因为在假设条件下, 据前者, 存在 $n>0$, 使 f^n 有周期 3; 据后者, f^n 在 $\Omega(f^n)$ 上混沌, 而 f^n 的混沌集也是 f 的混沌集, 因而 f 在 $\Omega(f)$ $(\supset\Omega(f^n))$ 上混沌.

李-约克混沌在各种情形下被广泛讨论着. 它们大多涉及符号动力系统. 我们将在以后详加讨论.

我们有下述更一般性的命题.

命题 5 设(X, f)为紧致系统，则f是拓扑混合的，蕴涵f是在李-约克意义下混沌的.

证明从略. 读者可参见[26].

§7.3 其他混沌

除了李-约克意义下混沌之外，尚有多种混沌的定义. 其中，最常见的是狄万内(R.L.Devaney)混沌.

设(X, f)为紧致系统.

定义 3 如果存在$\delta>0$，使得对每一点$x\in X$和x的任意邻域U_x，存在$y\in U_x$和$n>0$，满足

$$d(f^n(x), f^n(y))>\delta,$$

则称f对初值敏感依赖，δ称为敏感常数.

定义 4 如果下述三个条件得到满足，

i) f是拓扑传递的；

ii) f的周期点在X内处处稠密，即$\overline{P(f)}=X$；

iii) f对初值敏感依赖，

则称f在狄万内意义下是混沌的.

在这个定义中，i 表示系统是不可分解的，即狄万内混沌系统不能分解成两子系统的和，它们的底空间均含有内点；ii 说明没有周期点的系统(如极小系统)都不是狄万内混沌的；iii 说明系统是不可预测的，即初值的微小改变可能导致迭代结果产生不可忽视的误差. 这最后一条对计算数学有重大意义，似乎是构成狄万内混沌的灵魂. 但不幸的是，它不是独立的，而是 i 和 ii 的推论，即拓扑传递性加上周期点的稠密性，蕴涵对初值敏感依赖. 这在直观上是不难理解的：有一条轨道在空间内到处穿行(即每一个开集都被穿过)，它可以任意接近每一个周期点，而周期点却不能跟随它跑遍全空间. 这明显地蕴涵对初值敏感依赖性. 下面把这个事实表成命题形式，给出严格证明.

命题 6 在定义 4 中，条件 i 和 ii 蕴涵条件 iii(其中X是无

限集合).

证明　设(X, f)满足定义2中的条件i和ii. 当X是有限集时，它必是f的一条周期轨道. 这样的系统显然满足对初值敏感性. 下面假设X是无限集合.

我们断言，存在$\delta_0>0$，使得对任一点$x\in X$，都存在$p\in P(f)$，满足

$$d(\mathrm{orb}(p), x)\geqslant\delta_0/2.$$

实际上，任取两个不在同一轨道上的f的周期点p_1和p_2，并令

$$\delta_0=d(\mathrm{orb}(p_1), \mathrm{orb}(p_2))>0.$$

这个δ_0即满足要求. 这是因为，若

$$d(\mathrm{orb}(p_1), x)<\delta_0/2, \qquad d(\mathrm{orb}(p_2), x)<\delta_0/2,$$

则由三角不等式，可得

$$d(\mathrm{orb}(p_1), \quad \mathrm{orb}(p_2))<\delta_0,$$

这与δ_0的取法矛盾，断言获证.

下面证明$\delta=\delta_0/8>0$是f的敏感常数. 设$x\in X$为任一点，并取$\delta>\varepsilon>0$. 据f的周期点在X内的稠密性，在$V(x, \varepsilon)$内可取f的周期点p，并设它的周期为$n>0$.

据上述断言，存在$q\in P(f)$，使

$$d(\mathrm{orb}(q), x)\geqslant 4\delta.$$

令
$$U=\bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(V(f^i(q), \delta)).$$

因为$q\in U$，故U是非空开集. 据拓扑传递性，存在$y\in V(x, \varepsilon)\cap R(f)$和$k>0$，使$f^k(y)\in U$.

令$j=\left[\dfrac{k}{n}+1\right]$. 易见$1\leqslant nj-k\leqslant n$. 我们有

$$f^{nj}(y)=f^{nj-k}(f^k(y))\in f^{nj-k}(U)\subseteq V(f^{nj-k}(q), \delta).$$

考虑到$f^{nj}(p)=p$，由三角不等式，得

$$\begin{aligned}d(f^{nj}(p), f^{nj}(y))&=d(p, f^{nj}(y))\\&\geqslant d(x, f^{nj-k}(q))-d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y))\\&\quad -d(p, x),\end{aligned}$$

由于$p\in V(x,\delta)$和$f^{n_j}(y)\in V(f^{n_j-k}(q),\delta)$，又得

$$d(f^{n_j}(p),f^{n_j}(y))>4\delta-\delta-\delta=2\delta.$$

再次利用三角不等式，易见

$$d(f^{n_j}(x),f^{n_j}(y))>\delta,\qquad d(f^{n_j}(x),f^{n_j}(p))>\delta$$

至少一个成立．因为p和y均属于$V(x,\varepsilon)$，这就完成了证明(参见[13])．

由命题1，在狄万内混沌的定义中，至少应该去掉一个条件．我们说过，在定义4中，条件ii把诸如极小系统排斥在混沌系统之外，是不适当的．因此，应该去掉的是条件ii．我们提出

定义5 如果f满足定义2中的条件i和iii，就称f是在修改的狄万内意义下是混沌的．

命题7 f是拓扑强混合的，蕴涵f是在修改的狄万内意义下混沌的．

证明 设f拓扑强混合．记X的直径

$$D(X)=\sup_{x,y\in X}\{d(x,y)\}=\delta>0.$$

我们证明，$\delta/2$可选作f的敏感常数．

设$x\in X$．取y、$z\in X$和充分小的$\varepsilon>0$，使

$$d(V(y,\varepsilon),V(z,\varepsilon))>\delta/2.$$

容易看出，这样的y和z是存在的．据§3定义3，存在$N>0$，使得

$$f^n(V(x,\varepsilon))\cap V(y,\varepsilon)\neq\varnothing,$$
$$f^n(V(x,\varepsilon))\cap V(z,\varepsilon)\neq\varnothing.\qquad \forall n\geqslant N$$

这明显蕴涵$f^n(V(x,\varepsilon))$的直径

$$D(f^n(V(x,\varepsilon)))\geqslant d(V(y,\varepsilon),V(z,\varepsilon))\geqslant\delta/2.$$

由此易见，对每一个固定的$n>N$，存在$y\in V(x,\varepsilon)$，使得

$$d(f^n(x),f^n(y))>\delta/2.\qquad\square$$

有关狄万内混沌的讨论，请读者参阅[1]和有关文献．除狄万内混沌外，尚有多种混沌定义，例如，有人把正拓扑熵定义为混沌

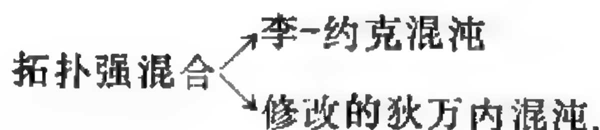
等，我们将不去一一列举.

顾名思义，混沌系统是指比较复杂的系统，但系统的复杂性没有甚至也不可能有一个统一的标准，不同的侧重面导致不同的混沌的内涵. 对于实验科学而言，这种情况是可以理解的，但对于一切从严格定义出发的数学而言，这个局面就不是能够长期容忍的. 很多数学工作者在努力寻求混沌的统一定义，尽管至今没获得成功，但这项工作还是应该坚持下去的. 值得注意是下面两个问题.

1) 混沌的本质是什么？描述系统的复杂性的概念很多，如拓扑熵，混合性，李雅普诺夫指数，初值敏感依赖和李-约克混沌等，它们从不同侧面反映了系统的复杂性. 混沌作为描述系统复杂性的一个概念，它是从什么侧面反映系统的复杂性的呢？也就是混沌的本质是什么？一个有意义的混沌定义必须从本质上不同于其他概念，也不应该是其他概念的合成. 例如，如果正拓扑熵与混沌等价，那么混沌这个概念也就意义不大了.

2) 既然混沌有很多不同定义，一个重要的问题就是这些不同混沌的比较，即蕴涵关系或等价关系，等. 特别是正拓扑熵与李-约克混沌的比较. 这个问题的进一步探讨不可避免地要涉及遍历理论. 这已超出本书范围，我们不得不割爱. 在本书范围内，最好的结果是：在非游荡集上，混沌的系统可以有零拓扑熵. 细节将在以后讨论.

作为本节的结束，我们提出下述问题. 据命题 5 和命题 7，我们有



我们自然要问：

问题 1　上述图表中的箭头的反方向是否成立？

问题 2　李-约克混沌与修改的狄方内混沌有否蕴涵关系？

第 3 章

符号动力系统

本章起，我们将进入本书的主要内容，即符号动力系统．本章介绍符号空间和其上的转移自映射，证明转移自映射的基本动力性状，给出子转移的一般描述，并由此导致子转移的分类——有限型子转移和一般子转移；作为符号动力系统的应用，介绍斯梅尔(S. Smale)马蹄、转移不变集和拓扑熵映射的连续性问题．

§ 8　符号空间与转移自映射

§ 8.1　符号空间与转移自映射

设整数 $k\geqslant 2$．任取 k 个不同符号，例如取 $0,\ 1,\ \cdots,\ k-1$．记

$$S=\{0,\ 1,\ \cdots,\ k-1\},$$

叫作“由 k 个符号组成的状态空间”，其中每一个符号亦称作“状态”．赋 S 以“离散拓扑”，即 S 的每一个元素都是开集因而也就都是闭集．S 显然是一个紧致拓扑空间．

作拓扑积

$$\begin{aligned}S^{\mathbb{Z}_+}=\prod_{n=0}^{\infty}S&=S\times S\times\cdots\\&=\{x=(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots)\mid x_n\in S,\ \forall n\geqslant 0\},\end{aligned}$$

这里的 $\mathbb{Z}_+$ 表示全体非负整数的集合．据著名的吉洪诺夫定理，$S^{\mathbb{Z}_+}$ 是紧致的．

设 $a_i\in S$，$i=0,\ \cdots,\ n-1$，$n>0$．又设 $m\geqslant 0$．记

$$_m[a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{n-1}]=\{x\in S^{\mathbb{Z}_+}\mid x_{m+i}=a_i,\ i=0,\ \cdots,\ n-1\},$$

叫作 S 上有限序列$(a_0,\ \cdots,\ a_{n-1})$上的柱形．易于看出，柱形是开集，也是闭集．显然，全体柱形的集合是可数的，而且构成了 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 的

乘积拓扑的一组基，即 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 的每一个开集均可写成柱形的并集. 因此，$S^{\mathbb{Z}_+}$ 满足第二可数性公设. 再者，不难看出，$S^{\mathbb{Z}_+}$ 是全不连通的，即它的每一个连通分支只由一个点组成. 又易证 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 是豪斯多夫(F. Hausdorff)空间. 因此，$S^{\mathbb{Z}_+}$ 是可度量化的. 它的一个常用的度量是：

$$\rho(x, y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d(x_n, y_n)}{2^n},$$

$$\forall x=(x_0, x_1, \cdots),\ y=(y_0, y_1, \cdots)\in S^{\mathbb{Z}_+}$$

这里 $$d(x_n, y_n)=\begin{cases}0, & \text{当 } x_n=y_n \text{ 时;}\\ 1, & \text{当 } x_n\neq y_n,\ \forall n\geqslant 0 \text{ 时.}\end{cases}$$

下述等价度量有时亦会用到：

$$\rho_1(x, y)=\max_n\left\{\frac{1}{n+1}\,\middle|\,x_n\neq y_n\right\}, \qquad \forall x, y\in S^{\mathbb{Z}_+}$$

容易验证，上面的 ρ 和 ρ_1 都是 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 上的度量. 即满足度量的三条性质，而且它们是等价度量.

由有限 k 个符号(状态)生成的紧致全不连通可度量空间 $S^{\mathbb{Z}_+}$，叫作 **k-单边符号空间**.

类似地，可以定义 k-双边符号空间：

$$S^{\mathbb{Z}}=\prod_{-\infty}^{\infty}S=\cdots\times S\times\overset{*}{S}\times S\times\cdots$$

$$=\{x=(\cdots x_{-1}\ \overset{*}{x_0}\ x_1\cdots)\mid x_n\in S,\ \forall n\in\mathbb{Z}\},$$

这里的 $\mathbb{Z}$ 表示全体整数的集合. 上面的 * 号表示第 0 个因子(坐标)所在的位置. $S^{\mathbb{Z}}$ 也是紧致拓扑空间，而且同样可以在其上定义柱形：设 $m\in\mathbb{Z}$,

$${}_m[a_0\ a_1\ \cdots\ a_{n-1}]=\{x\in S^{\mathbb{Z}}\mid x_{m+i}=a_i,\ i=0, \cdots, n-1\}.$$

易见，$S^{\mathbb{Z}}$ 上亦有由全体柱形构成的可数拓扑基，且 $S^{\mathbb{Z}}$ 也是豪斯多夫空间，因而 $S^{\mathbb{Z}}$ 亦是可度量化的. 它对应单边情形的两个度量分别是：

$$\rho(x, y)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{d(x_n, y_n)}{2^{|n|}} \qquad \forall x, y\in S^{\mathbb{Z}}$$

和
$$\rho_1(x, y)=\max_{n\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{1}{|n|+1}\,\middle|\,x_n\neq y_n\right\}, \qquad \forall x, y\in S^{\mathbb{Z}}$$

同样，$S^{\mathbb{Z}}$ 也是全不连通的. 紧致可度量拓扑空间 $S^{\mathbb{Z}}$ 叫作 **k-双边符号空间**.

在 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 上定义一个特殊的自映射如下.

定义 1

$$\begin{cases}\sigma: & S^{\mathbb{Z}_+}\to S^{\mathbb{Z}_+},\\ & (x_0, x_1, \cdots)\mapsto(x_1, x_2, \cdots).\end{cases}$$

即在 σ 的作用下，$S^{\mathbb{Z}_+}$ 的点的坐标依次向左移一位(原第一个坐标变成第 0 个坐标，等等；原第 0 个坐标抹去). σ 叫作"单边 k-符号空间 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 上的转移自映射".

命题 1 σ 是连续的，在上的，k 对 1 的.

证明简单，从略.

类似地，可以在 $S^{\mathbb{Z}}$ 上定义转移自同胚.

定义 2 定义

$$\begin{cases}\sigma: & S^{\mathbb{Z}}\to S^{\mathbb{Z}},\\ & (\cdots x_{-1}\overset{*}{x_0}\, x_1\cdots)\mapsto(\cdots x_0\overset{*}{x_1}\, x_2\cdots).\end{cases}$$

即在 σ 的作用下，$S^{\mathbb{Z}}$ 的点的坐标依次向左移一位(原来的第一个坐标变成第 0 个坐标，等等). 容易看出，σ 是 $S^{\mathbb{Z}}$ 上的自同胚，它的逆映射是把 $S^{\mathbb{Z}}$ 上点的坐标依次向右移一位的作用，σ 叫做"双边 k-符号空间 $S^{\mathbb{Z}}$ 上的转移自同胚". 所谓符号动力系统，即是指

$$(S^{\mathbb{Z}_+}, \sigma) \quad 或 \quad (S^{\mathbb{Z}}, \sigma).$$

前者是拓扑离散半动力系统，后者是拓扑离散动力系统，它们将是本书的主要讨论对象. 这两种情形的动力性状很相似，它们有相同的问题，也有相同的结论，在处理手法上也相似. 下面主要讨论单边情形. 为了简单起见，此后除非另有声明，凡提到符号动力系统

总是指单边情形.

§8.2 符号动力系统的动力性状

设$k\geqslant 2$和$(S^{\mathbb{Z}_+},\ \sigma)$同上. 下面证明$\sigma$的基本动力性状. 它们是符号动力系统之所以重要和有广泛应用的基础.

命题 2 σ有以每一个正整数为周期的周期点.

证明 设$n\geqslant 1$. 易见,

$$x=(\overbrace{1\,0\cdots 0}^{n}\,1\,0\cdots 0\,1\,0\cdots)$$

是σ的一个n-周期点. 证毕.

命题 3 $\overline{P(\sigma)}=S^{\mathbb{Z}_+}$. 即$\sigma$的周期点集在$S^{\mathbb{Z}_+}$内处处稠密.

证明 设$x=(x_0\,x_1\cdots)\in S^{\mathbb{Z}_+}$. 对每一个$n\geqslant 1$, 可以按命题 2 证明中的方式由$S$上$n$个符号构成的有限序列$(x_0\cdots x_{n-1})$依次无限排列而构造一点

$$x^n=(x_0\,x_1\cdots x_{n-1}\,x_0\,x_1\cdots x_{n-1}\cdots)\in S^{\mathbb{Z}_+}.$$

易见, x^n是一个周期点. 显然有

$$\lim_{n\to\infty}x^n=x.$$

即$S^{\mathbb{Z}_+}$中每一点都是σ的周期点的极限点. 这就完成命题 3 的证明.

命题 4 σ是拓扑传递的. 即存在$x\in S^{\mathbb{Z}_+}$, 使得

$$\overline{\mathrm{orb}(x)}=S^{\mathbb{Z}_+}.$$

证明 S中k个符号每次取$n\geqslant 1$个, 共有k^n个不同排列. 把这k^n个不同的n-序列按任意顺序依次排成$n\cdot k^n$-序列, 记作P_{nk^n}. 令

$$x=P_kP_{2k^2}\cdots P_{nk^n}\cdots\in S^{\mathbb{Z}_+}.$$

下面我们证明

$$\overline{\mathrm{orb}(x)}=S^{\mathbb{Z}_+}.$$

任取$y\in S^{\mathbb{Z}_+}$. 对任意$n\geqslant 1$, 根据点x的构造, 易见存在$l_n\geqslant 1$,

使得$\sigma^{l_n}(x)$的前 n 个坐标依次与$(y_0 \cdots y_{n-1})$对应相等．据度量 ρ 的定义，这蕴涵

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^{l_n}(x)=y.$$

这就完成了命题 4 的证明．

命题 5　σ 是拓扑弱混合的．即

$$\sigma\times\sigma:\qquad S^{\mathbb{Z}_+}\times S^{\mathbb{Z}_+}\to S^{\mathbb{Z}_+}\times S^{\mathbb{Z}_+}$$

是拓扑传递的．

证明　下面证明，存在 u、$v\in S^{\mathbb{Z}_+}$，使对任意 x、$y\in S^{\mathbb{Z}_+}$，存在单调递增序列 l_n，满足

$$\lim_{n\to\infty}(\sigma\times\sigma)^{l_n}(u,\ v)=(x,\ y),$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^{l_n}(u)=x,\qquad \lim_{n\to\infty}\sigma^{l_n}(v)=y.$$

设 $n\geqslant 1$，且 P_{nk^n} 同上命题中是 S 中 k 个符号每次取 n 个共 k^n 个不同 n–序列按任意顺序依次排成一行而得到的一个 $n\cdot k^n$–序列．这样的序列共有彼此不同的 $k^n!$ 个．把这 $k^n!$ 个 $n\cdot k^n$–序列再按任意顺序依次排成一行而得到一个 $k^n!\,nk^n$–序列，记作 $Q_{k^n!n\cdot k^n}$，$\forall n\geqslant 1$．又记 $k^n!$ 个 $P_{n\cdot k^n}$ 依次排成一行而得到的 $k^n!n\cdot k^n$–序列为 $P_{k^n!n\cdot k^n}$，$\forall n\geqslant 1$．

记

$$u=Q_{k!k}Q_{k^2!2\cdot k^2}\cdots Q_{k^n!n\cdot k^n}\cdots\in S^{\mathbb{Z}_+},$$

$$v=P_{k!k}P_{k^2!2\cdot k^2}\cdots P_{k^n!n\cdot k^n}\cdots\in S^{\mathbb{Z}_+}.$$

由上述构造易见，对任意 $n>0$，存在 $l_n\geqslant 0$，使得 $\sigma^{l_n}(u)$和 $\sigma^{l_n}(v)$的前 n 个坐标分别与$(x_0 \cdots x_{n-1})$和$(y_0 \cdots y_{n-1})$对应相等．这证明了

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^{l_n}(u)=x,\qquad \lim_{n\to\infty}\sigma^{l_n}(v)=y,$$

从而完成命题 5 的证明．

命题 6　σ 是拓扑强混合的．即对任意非空开集 u、$v\subset S^{\mathbb{Z}_+}$，存在 $N>0$，使得

$$\sigma^n(u)\cap v\neq\varnothing. \qquad \forall n\geqslant N$$

记 u、$v\in S^{\mathbb{Z}_+}$ 为非空开集，并设 $x\in u$. 由拓扑基的性质，存在 $N>0$, 使得

$${}_0[x_0\cdots x_{N-1}]\subset u.$$

易见，$\sigma^n({}_0[x_0\cdots x_{N-1}])=S^{\mathbb{Z}_+}$, 从而

$$\begin{aligned}\sigma^n(u)\cap v&\supset\sigma^n({}_0[x_0\cdots x_{N-1}])\cap v\\&\supset S^{\mathbb{Z}_+}\cap v=v\neq\varnothing,\end{aligned}$$

只要 $n\geqslant N$. □

我们知道(见第1章§3):

拓扑强混合 ⇒ 拓扑弱混合 ⇒ 拓扑传递.

因此，命题6蕴涵命题5, 命题5蕴涵命题4. 我们这里给出命题4和命题5的独立证明，是希望读者借此对符号动力系统有较深刻的感性认识. 从有限序列出发，构造 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 中的点，以满足所需要的性质，这种手法还会被用到.

命题 7 $\mathrm{ent}(\sigma)=\log k$.

证明 下面用拓扑熵的 Bowen 定义(见§6), 并利用度量 ρ_1 给出证明.

设 $0<\varepsilon<1$, 并设 $m>0$ 是最小的正整数，使得

$$\varepsilon\geqslant\frac{1}{m}.$$

因此，对 x、$y\in S^{\mathbb{Z}_+}$,

$$\rho_1(x,\ y)\leqslant\varepsilon\Leftrightarrow x_i=y_i. \qquad i=0,\ \cdots,\ m-1$$

记 $S_{m,n}=\{P=(a_0\cdots a_{m+n-1})\,|\,a_i\in S,\ i=0,\ \cdots,\ m+n-1\}$,

$$P_{m,n}=\{PP\cdots\in S^{\mathbb{Z}_+}\,|\,P\in S_{m,n}\}.$$

易见，基数

$$\#(S_{m,n})=\#(P_{m,n})=k^{m+n}.$$

设 $x\in S^{\mathbb{Z}_+}$, 并取 $y\in P_{m,n}$, 使得

$$y_i=x_i. \qquad i=0,\ \cdots,\ m+n-1$$

显然，$\rho_1(\sigma^i(x),\ \sigma^i(y))\leqslant\varepsilon. \qquad i=0,\ \cdots,\ n-1$

据张成集的定义(见第2章§6)，$P_{m,n}$是σ的一个(n, ε)-张成集．据定义3，我们有

$$r_n(\varepsilon, S^{\mathbb{Z}_+}, \sigma) \leqslant k^{m+n}. \qquad \forall n \geqslant 0$$

因此，据拓扑熵的 Bowen 定义，得

$$\begin{aligned}\operatorname{ent}(\sigma) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon, S^{\mathbb{Z}_+}, \sigma) \\ &\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log k^{m+n} \\ &= \log k.\end{aligned}$$

又记

$$S_n = \{P = (a_0 \cdots a_{n-1}) \mid a_i \in S,\ i = 0, \cdots, n-1\},$$
$$P_n = \{PP\cdots \in S^{\mathbb{Z}_+}\ P \in S_n\}.$$

显然地，基数

$$\#(S_n) = \#(P_n) = k^n. \qquad \forall n > 0$$

设 $x, y \in P_n$, $x \neq y$．据上述构造，易见对某个 $0 \leqslant i < n$,

$$\rho_1(\sigma^i(x), \sigma^i(y)) \geqslant 1 > \varepsilon.$$

据分离集的定义(见§6)，P_n是σ的一个(n, ε)-分离集．据§6定义3,

$$S_n(\varepsilon, S^{\mathbb{Z}_+}, \sigma) \geqslant k^n. \qquad \forall n > 0$$

据拓扑熵的 Bowen 定义，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{ent}(\sigma) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(\varepsilon, S^{\mathbb{Z}_+}, \sigma) \\ &\geqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log k^n \\ &= \log k.\end{aligned}$$

□

§8.3 转移自映射的混沌性状

设 $k \geqslant 2$ 和$(S^{\mathbb{Z}_+}, \sigma)$同上．本节讨论$\sigma$的混沌性状．不失普遍性，可设 $k = 2$．

记 $S_0^{\mathbb{Z}_+} = \{x \in S^{\mathbb{Z}_+} \mid x_0 = 0\}$, $S_1^{\mathbb{Z}_+} = \{x \in S^{\mathbb{Z}_+} \mid x_0 = 1\}$.

它们是 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 的不相交闭子集. 易见

$$\rho(S_0^{\mathbb{Z}_+},\ S_1^{\mathbb{Z}_+})=1,\qquad S_0^{\mathbb{Z}_+}\cup S_1^{\mathbb{Z}_+}=S^{\mathbb{Z}_+}$$

和

$$\sigma(S_i^{\mathbb{Z}_+})=S^{\mathbb{Z}_+}.\qquad i=0,\ 1$$

令 $M=\{E_l\}_{l=0}^{\infty}$ 为集合序列, 其中

$$E_l=S_0^{\mathbb{Z}_+}\quad 或\quad S_1^{\mathbb{Z}_+}.\qquad \forall\, l\geqslant 0$$

记全体这样的序列的集合为 $\mathscr{E}$.

引理 1 对每一个 $M=\{E_l\}\in\mathscr{E}$, 唯一存在 $x\in S^{\mathbb{Z}_+}$, 使得

$$\sigma^l(x)\in E_l.\qquad \forall\, l\geqslant 0$$

证明 令

$$x_l=\begin{cases}0, & 当\ E_l=S_0^{\mathbb{Z}_+}\ 时;\\ 1, & 当\ E_l=S_1^{\mathbb{Z}_+},\ \forall l\geqslant 0\ 时.\end{cases}$$

显然, $x=(x_0\, x_1\, \cdots)\in S^{\mathbb{Z}_+}$ 满足引理 1 的要求, 且是唯一的. □

设 $M=\{E_l\}\in\mathscr{E}$. 记

$$r(M,\ l)=\#(\{i\mid E_i=S_0^{\mathbb{Z}_+},\ i=0,\ \cdots,\ l\}).$$

引理 2 设实数 $\eta\in(0,\ 1)$. 则存在

$$M^\eta=\{E_l\}\in\mathscr{E},$$

使得

$$\lim_{l\to\infty}\frac{r(M^\eta,\ l^2)}{l}=\eta.$$

证明 下述证明类似于定理 2 中 ii 的证明. 用归纳法构造 $M^\eta=\{E_l^\eta\}$. 设 $l_0>0$ 是使 $[l_0\eta]=1$ 的最小正整数. 定义

$$M_{l_0^2}^\eta=\{E_0^\eta,\ \cdots,\ E_{l_0^2}^\eta\},$$

其中

$$\begin{cases}E_i^\eta=S_0^{\mathbb{Z}_+}, & 当\ 0\leqslant i<l_0^2\ 时;\\ E_{l_0^2}^\eta=S_1^{\mathbb{Z}_+}.\end{cases}$$

对 $l>l_0$, 归纳地定义

$$M_{l^2}^\eta=\{E_0^\eta,\ \cdots,\ E_{l^2}^\eta\},$$

其中

$$\{E_0^\eta,\ \cdots,\ E_{(l-1)^2}^\eta\}=M_{(l-1)^2}^\eta,$$

$$E_i^\eta=S_0^{\mathbb{Z}_+},\qquad (l-1)^2<i<l^2$$

和 $$E_l^\eta=\begin{cases}S_0^{\mathbb{Z}_+}, & \text{当 } [l\eta]-[(l-1)\eta]=1 \text{ 时;}\\ S_1^{\mathbb{Z}_+}, & \text{当 } [l\eta]-[(l-1)\eta]=0 \text{ 时.}\end{cases}$$

归纳步骤完成，我们得到

$$M^\eta=\{E_l^\eta\}\in\mathscr{E}.$$

据上述构造和 § 7 引理 3，易于归纳证明

$$r(M^\eta,\ l^2)=[l\eta]. \qquad \forall l>0$$

再据 § 7 引理 4，得

$$\lim_{l\to\infty}\frac{r(M^\eta,\ l^2)}{l}=\eta. \qquad \square$$

设 $M^\eta\in\mathscr{E}$ 满足引理 2 的要求．记与它对应满足引理 1 条件的唯一点为

$$x^\eta=(x_0^\eta\ x_1^\eta\ \cdots)\in S^{\mathbb{Z}_+}.$$

又记 $C_0=\{x^\eta\in S^{\mathbb{Z}_+}\mid\eta\in(0,\ 1)\},\qquad C=\bigcup_{i=0}^{\infty}\sigma^i(C_0).$

我们先证明下述诸简单断语，其中 $0<\eta\leqslant\theta<1$.

(1) $x_i^\eta=0\Leftrightarrow$ 存在 $l>0$，使得

$$i=l^2 \quad \text{且} \quad [l\eta]-[(l-1)\eta]=1$$

和

$$x_{i+j}^\eta=1. \qquad 0<j<2l+1,\ \forall l\geqslant1$$

这个断语易由 M^η 的构造和 x^η 的性质(引理 1)直接看出.

(2) 存在无限多整数 $l>0$，使 $x_{l^2}^\eta=0$.

否则，由 M^η 的构造易于看出 $r(M^\eta,\ l^2)$ 有界，因而导致 $\eta=0$ 的矛盾.

(3) 对任意 $N>0$，存在 $l>N$，使 $x_{l^2}^\theta\neq x_{l^2}^\eta$.

否则，易看出 $r(M^\theta,\ l^2)-r(M^\eta, l^2)$ 有界，导致 $\eta=\theta$ 的矛盾.

(4) 记

$$e=(1\ 1\ \cdots)\in S^{\mathbb{Z}_+},\quad e_i=(\overbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}^{i}\ 0\ 1\ 1\ \cdots)\in S^{\mathbb{Z}_+}, \qquad \forall i>0,$$

则

$$\omega(x,\ \sigma)=\{e,\ e_i\mid\forall i>0\}. \qquad \forall x\in C$$

因为 $$\omega(x,\ \sigma)=\omega(\sigma^i(x),\ \sigma), \qquad \forall x\in S^{\mathbb{Z}_+},\ \forall i\geqslant1$$

故只须对 $x\in C_0$ 加以验证即可。

设 $x^\eta\in C_0$。据(1)，易见

$$\rho(\sigma^{l^2+1}(x^\eta),\ e)\to 0, \qquad (当\ l\to\infty 时)$$

故 $e\in\omega(x^\eta,\ \sigma)$。

又据(2)，存在

$$l_1<l_2<\cdots<l_j<\cdots,$$

使得 $\sigma^{l_j^2}(x^\eta)$ 的第一个坐标为 0，$\forall j>0$。据(1)可以看出，对任意 $i>0$，当 j 充分大时，$\sigma^{l_j^2-i}(x^\eta)$ 的前 i 个坐标都是 1，第 $i+1$ 个坐标为 0，随后又有至少 $(l_j+1)^2-l_j^2-1-(i+1)=2l_j-(i+2)$ 个坐标都是 1。因此

$$\rho(\sigma^{l_j^2-i}(x^\eta),\ e_i)\to 0, \qquad (j\to\infty)$$

故

$$e_i\in\omega(x^\eta,\ \sigma). \qquad \forall i>0$$

下设 $y\in S^{\mathbb{Z}_+}$ 至少有两个坐标为 0。不妨设 $y_h=y_m=0$，$h<m$。我们证明

$$y\notin\omega(x^\eta,\ \sigma). \qquad \forall x^\eta\in C_0$$

用反证法。设存在 $\eta\in(0,\ 1)$，使 $y\in\omega(x^\eta,\ \sigma)$。即存在

$$l_1<l_2<\cdots<l_j<\cdots,$$

使得

$$\lim_{j\to\infty}\sigma^{l_j}(x^\eta)=y.$$

易见，当 j 充分大时，$\sigma^{l_j}(x^\eta)$ 的第 $h+1$ 个坐标和第 $m+1$ 个坐标都是 0。但据(1)，当 j 充分大时，$\sigma^{l_j}(x^\eta)$ 的任何两个等于 0 的坐标之间可以有任意多个坐标为 1，导致矛盾。(4)获证。

下面证明 σ 有较李-约克原始定义更强的混沌性状。

命题 8 下述(i)和(ii)成立：

(i) σ 有 n-周期点，$\forall n>0$。

(ii) 存在不可数集合 $C\subset S^{\mathbb{Z}_+}-P(\sigma)$，$\sigma(C)\subset C$，且满足

A) $\limsup\limits_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(x),\ \sigma^n(y))\geqslant 1$，$\forall x, y\in C$，$x\neq y$；

B) $\liminf\limits_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(x),\ \sigma^n(y))=0$，$\forall x, y\in C$；

C) $\liminf\limits_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(x),\ \sigma^n(p))>0,\ \forall x\in C,\ \forall p\in P(\sigma)-\{e\}$,

其中 $e=(1\ 1\ \cdots)\in P(\sigma)$.

证明 (i)即命题2.

(ii) 下面证明上面构造的 C 即满足所求.

由上面的(3)易见，当 $0<\eta<\theta<1$ 时，$x^\eta\neq x^\theta$. 这证明 C_0 与开区间 $(0,\ 1)$ 的点一一对应，故不可数. C 当然也不可数. 又，$\sigma(C)\subset C$ 是明显的. 最后，由上面的(1)和(2)易见，x^η 的轨道由无限多不同点构成，因此 x^η 和 $\sigma^l(x^\eta)$ $(\forall l>0)$都不是 σ 的周期点，即 $C\subset S^{Z_+}-P(\sigma)$.

A) 设 $\sigma^h(x^\eta)$和 $\sigma^m(x^\theta)$是 C 中不同的两点，其中 x^η、$x^\theta\in C_0$，$0<\eta\leqslant\theta<1$，不妨设 $0\leqslant h\leqslant m$(当 $\eta=\theta$ 时，$h<m$).

先设 $h=m$(这时 $0<\eta<\theta<1$). 据(3)，存在 $l_1<l_2<\cdots<l_j<\cdots$，使得

$$x^\eta_{l_j^2}\neq x^\theta_{l_j^2}. \qquad \forall j>0$$

因此，

$$\rho(\sigma^{l_j^2-h}(\sigma^h(x^\eta)),\ \sigma^{l_j^2-h}(\sigma^h(x^\theta)))=\rho(\sigma^{l_j^2}(x^\eta),\ \sigma^{l_j^2}(x^\theta))\geqslant 1. \qquad \forall l_j^2>l$$

这证明 $\limsup\limits_{j\to\infty}\rho(\sigma^j(\sigma^h(x^\eta)),\ \sigma^j(\sigma^h(x^\theta)))\geqslant 1$.

再设 $h<m$(这时 $0<\eta\leqslant\theta<1$). 据(2)，存在 $l_1<l_2<\cdots<l_j<\cdots$，使得

$$x^\eta_{l_j^2}=0. \qquad \forall j\geqslant 1$$

易见，当 j 充分大时，

$$\sigma^{l_j^2-h}(\sigma^h(x^\eta))=\sigma^{l_j^2}(x^\eta)\in S_0^{Z_+},$$
$$\sigma^{l_j^2-h}(\sigma^m(x^\theta))=\sigma^{l_j^2-h+m}(x^\theta)\in S_1^{Z_+}.$$

因此，$\limsup\limits_{j\to\infty}\rho(\sigma^{l_j^2-h}(\sigma^h(x^\eta)),\ \sigma^{l_j^2-h}(\sigma^m(x^\theta)))\geqslant 1$.

A 获证.

B) 设 $\sigma^h(x^\eta)$和 $\sigma^m(x^\theta)$同 A. 不妨设

$$l_0^2\leqslant m-h+1\leqslant(l_0+1)^2.$$

由(1)易见，当 $l>l_0$ 时，

$$\sigma^{l^2-h+1}(\sigma^h(x^\eta))=\sigma^{l^2+1}(x^\eta)\in S_1^{\mathbb{Z}_+},$$
$$\sigma^{l^2-h+1}(\sigma^m(x^\theta))=\sigma^{l^2-h+m+1}(x^\theta)\in S_1^{\mathbb{Z}_+},$$

且它们的前 $(l+1)^2-l^2-(m-h+1)=2l-(m-h)$ 个坐标均为 1. 这明显给出 B 的证明.

C) 设 $\sigma^h(x^\eta)\in C$, 并设存在 $p\in P(\sigma)$, 使

$$\liminf_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(\sigma^h(x^\eta)),\ \sigma^n(p))=0.$$

由 p 的周期性易证 $p\in\omega(x^\eta,\ \sigma)$. 注意到(4)中的 $e_i(\forall i>0)$ 均不是 σ 的周期点，故 $p=e$. □

命题 8 中的混沌集要求对 σ 不变，即 $\sigma(C)\subset C$. 如果只是证明 σ 在 §7.2 定义 2 意义下混沌，那就简单得多了.

命题 9 对每一点 $x\in S^{\mathbb{Z}_+}$, 可以构造一个混沌集 C_x, 满足

i) $\limsup\limits_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(y),\ \sigma^n(z))>0,\ \forall y,\ z\in C_x,\ y\neq z;$

ii) $\liminf\limits_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(y),\ \sigma^n(z))=0,\ \forall y,\ z\in C_x.$

证明 对每一个 $r\in(0,\ 1)$, 定义 $x^r\in S^{\mathbb{Z}_+}$, 满足

$$x_n^r\neq x_n \Leftrightarrow \text{存在 } l>0,\ \text{使 } n=l^2,$$
$$\text{且 } [(l+1)r]-[lr]=1,\ \forall n\geqslant 0.$$

即 x^r 与 x 的区别仅仅在于满足上述条件的平方数坐标处它们的坐标不同. 因为假设 $k=2$, 故上述 x^r 对每一个 r 是完全确定的($k>2$ 时也可以定义 x^r, 只须把上述等价关系左侧改成 $x_n^r\equiv x_n+1(\mathrm{mod}\,k)$即可).

设 $0<\eta<\theta<1$.

据(3), 对任意 $N>0$, 存在 $l>N$, 使得

$$x_{l^2}^\eta\neq x_{l^2}^\theta.$$

这保证了 i 成立.

显然，对任意 $l>0$, $\sigma^{l^2+1}(x^\eta)$与 $\sigma^{l^2+1}(x^\theta)$至少前 $2l$ 个坐标对应相等. 这又保证 ii 成立. □

§9 子 转 移

§9.1 子转移和排除系统

设 $k\geqslant 2$, $(S^{\mathbb{Z}_+},\ \sigma)$同前.

下面用 $L(S^{\mathbb{Z}_+})$表示对σ不变的$S^{\mathbb{Z}_+}$的全体闭子集的集合. 当$A\in L(S^{\mathbb{Z}_+})$时, 子系统

$$\sigma_A=\sigma\mid_A:\quad A\to A$$

叫作"σ 的子转移". 我们有时也用 $L(S^{\mathbb{Z}_+})$ 表示σ的全体子转移的集合.

我们已经证明了σ的一系列动力性状. 也许我们还可以发现和证明σ的进一步的新性质, 但不管怎么样, σ 是一个固定的特殊映射, 没有什么变化. 在符号动力系统的理论中, 应用更多的是子转移, 内容更丰富的也是有关子转移的讨论. 本节我们将给出子转移的一个一般刻划.

设 $A=(a_0\cdots a_{n-1})$是S上一个长度为$n\geqslant 1$的有限序列, 简称n-序列. 设$x\in S^{\mathbb{Z}_+}$. 如果存在$m\geqslant 0$, 使得

$$x_{m+i}=a_i,\qquad\qquad i=0,\ \cdots,\ n-1$$

即x属于A上某个柱形, 则说"有限序列A出现在x内"或"x含有A", 记作

$$A\prec x;$$

如果存在$x\in\Lambda$, 使$A\prec x$, 则说"A出现在$\Lambda\in L(S^{\mathbb{Z}_+})$内".

设 $B=(b_0\cdots b_{m-1})$亦是S上有限序列$(m\geqslant 1)$. 如果$n\leqslant m$, 且存在$0\leqslant l\leqslant m-n$, 使得

$$b_{l+i}=a_i,\qquad\qquad i=0,\ \cdots,\ n-1$$

则说"A出现在B内"或"B含有A", 记作

$$A\prec B,$$

这时我们也说"A是B的一个子序列".

设 $\mathscr{A}$ 是 S 上有限序列的一个集合. 记

$$\Lambda_{\mathscr{A}}=\{x\in S^{\mathbb{Z}_+}\mid A\not\prec x,\ \forall A\in\mathscr{A}\}.$$

命题 1 对任意 S 上有限序列的集合 $\mathscr{A}$, $\Lambda_{\mathscr{A}}\in L(S^{\mathbb{Z}_+})$.

证明 设 $A\in\mathscr{A}$. 据定义, A 可以在其内出现的点的集合是 A 上所有柱形的并集, 因而是开集. 因此, A 不能出现在其内的点的集合是 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 的闭子集. 显然, $\Lambda_{\mathscr{A}}$ 即是当 A 跑遍 $\mathscr{A}$ 时 A 所对应的这样的集合的交集, 因而也是 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 的闭子集. $\Lambda_{\mathscr{A}}$ 对 σ 不变性是明显的, 因为按定义, A 不能出现在 x 内, 当然也不能出现在 $\sigma(x)$ 内. □

据命题 1, 每给定 S 上一个有限序列的集合 $\mathscr{A}$, 就决定了一个 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 的对 σ 不变的闭子集 $\Lambda_{\mathscr{A}}$, 因而也就决定了一个子系统

$$\sigma_{\Lambda_{\mathscr{A}}}:\quad \Lambda_{\mathscr{A}}\to\Lambda_{\mathscr{A}}.$$

$\mathscr{A}$ 叫作 $\Lambda_{\mathscr{A}}$ 或子系统 $\sigma_{\Lambda_{\mathscr{A}}}$ 的排除系统, $\sigma_{\Lambda_{\mathscr{A}}}$ 叫作由排除系统 $\mathscr{A}$ 决定的子转移. 我们有下述重要命题.

命题 2 设 $\Lambda\in L(S^{\mathbb{Z}_+})$. 则存在 S 上有限序列的集合 $\mathscr{A}$, 使 $\Lambda=\Lambda_{\mathscr{A}}$.

证明 令 $\mathscr{A}$ 是 S 上所有不出现在 Λ 内的有限序列的集合. 由排除系统的定义, 易见

$$\Lambda\subseteq\Lambda_{\mathscr{A}}.$$

若 $\Lambda\subsetneqq\Lambda_{\mathscr{A}}$, 则 $\Lambda_{\mathscr{A}}-\Lambda$ 是 $\Lambda_{\mathscr{A}}$ 的非空开集. 故存在 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 的开集 u, 使

$$u\cap\Lambda_{\mathscr{A}}=\Lambda_{\mathscr{A}}-\Lambda.$$

设 B 为有限序列, 使

$${}_0[B]\subset u.$$

于是有

$${}_0[B]\cap\Lambda_{\mathscr{A}}\subset\Lambda_{\mathscr{A}}-\Lambda.$$

若存在 $x\in\Lambda$, 使

$$B\prec x,$$

或对某个 $m>0$,

$$x\in{}_m[B],$$

则

$$\sigma^m(x) \in {}_0[B].$$

但是$\sigma^m(x) \in \Lambda \subset \Lambda_{\mathscr{A}}$，这导致

$${}_0[B] \cap \Lambda_{\mathscr{A}} \not\subset \Lambda_{\mathscr{A}} - \Lambda$$

的矛盾．故 B 可以出现在 $\Lambda_{\mathscr{A}}$ 内，但不能出现在 Λ 内．按 $\mathscr{A}$ 的定义，$B \in \mathscr{A}$．这又与 B 可以出现在 $\Lambda_{\mathscr{A}}$ 内矛盾．这个矛盾由假设 $\Lambda \subsetneqq \Lambda_{\mathscr{A}}$ 引起．因此

$$\Lambda = \Lambda_{\mathscr{A}}.$$ □

推论 设 $\mathscr{A}$ 为 S 上有限序列的集合，则

$$\Lambda_{\mathscr{A}} = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} \Lambda_{\{A\}}.$$

进而，若 $\mathscr{A}_n \subset \mathscr{A}_{n+1} (\forall n > 0)$，且 $\mathscr{A} = \bigcup_{n>0} \mathscr{A}_n$，则

$$\Lambda_{\mathscr{A}} = \bigcap_{n>0} \Lambda_{\mathscr{A}_n}.$$

可从定义出发直接验证，证明从略．

命题 3 设 $\mathscr{A}$ 为 S 上有限序列的集合，则存在 S 上有限序列集合的序列 $\{\mathscr{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足

$$\mathscr{A}_n \subset \mathscr{A}_{n+1} \subset \mathscr{A}, \quad \mathscr{A} = \bigcup_{n>0} \mathscr{A}_n.$$

因而

$$\Lambda_{\mathscr{A}} = \bigcap_{n>0} \Lambda_{\mathscr{A}_n}.$$

证明 对每一个 $n > 0$，令 $\mathscr{A}_n$ 是 $\mathscr{A}$ 中所有长度不大于 n 的有限序列的集合．显然

$$\mathscr{A}_n \subset \mathscr{A}_{n+1} \subset \mathscr{A} \quad \text{和} \quad \mathscr{A} = \bigcup_{n>0} \mathscr{A}_n.$$ □

命题 2 说明，每一个 $\Lambda \in L(S^{\mathbf{Z}_+})$ 或 σ 的一个子转移可由 S 上的一个有限序列集合，即排除系统决定．反之，S 上每一个有限序列集合可以决定一个 $\Lambda \in L(S^{\mathbf{Z}_+})$ 或 σ 的子转移．但是，容易看出，这种决定不是一对一的，且任何一个排除系统可以扩大成一个无穷集合（如果原来是有限集合的话）而不改变所决定的子转移．命题 3 说明，每一个子转移可以由可数个由有限元素构成的排除系统决定．显然地，由有限的排除系统决定的子转移更容易掌握，因

而也就简单些. 这导致子转移或 $L(S^{\mathbb{Z}_+})$的分类.

§9.2 有限型子转移和阶数

设 $k\geqslant 2$, $(S^{\mathbb{Z}_+}, \sigma)$同上.

定义 1 设 $\Lambda\in L(S^{\mathbb{Z}_+})$. 如果 Λ 有一个有限的排除系统, 则称 Λ 或

$$\sigma_\Lambda:\qquad \Lambda\to\Lambda$$

是有限型的. 并称这个排除系统所含有限序列的最大长度为其阶数. 所有排除系统阶数的下确界, 称为 Λ 或子转移

$$\sigma_\Lambda:\qquad \Lambda\to\Lambda$$

的阶数. 阶数是一个正整数.

有限型子转移与非有限型子转移在动力性状上可以大相径庭. 比较起来, 前者要简单得多, 也得到较系统的研究, 有着完整的结果和广泛应用. 有限型子转移是本书主要讨论对象. 下面先给出有限型子转移的一些等价条件.

命题 4 设 $\Lambda\in L(S^{\mathbb{Z}_+})$, 则下述条件等价:

i) Λ 是有限型的, 阶数为 $N>0$;

ii) 存在 S 上长度为 $N>0$ 的有限序列集合 $\mathscr{B}'$, 使得

$\Lambda=\{x\in S^{\mathbb{Z}_+}| \forall n\geqslant 0,\ (x_n\, x_{n+1}\, \cdots\, x_{n+N-1})\in\mathscr{B}'\}$;

iii) 设 x、$y\in\Lambda$, 对某个 $n\geqslant 0$, 有

$$x_l=y_l,\qquad l=n,\ n+1,\ \cdots,\ n+N-2$$

定义 $z\in S^{\mathbb{Z}_+}$, 使

$$z_l=\begin{cases} x_l, & 当\ l\leqslant n+N-2\ 时; \\ y_l, & 当\ l\geqslant n\ 时, \forall l\geqslant 0,\end{cases}$$

则 $z\in\Lambda$;

iv) 对任意 $n\geqslant N+1$ 和任意 S 上有限序列$(a_0,\ \cdots,\ a_n)$, 若

$$u={}_0[a_0\ \cdots\ a_{n-1}]\cap\Lambda\neq\varnothing,$$

$$v={}_{n-N+1}[a_{n-N+1}\ \cdots\ a_n]\cap\Lambda\neq\varnothing,$$

则

$$u\cap v\neq\varnothing.$$

证明 i ⇒ ii 设 $\mathscr{B}$ 是 Λ 的一个所有元素长度均为N的排除系统(这样的系统显然存在). 易见 S 上所有 N-序列的集合与 $\mathscr{B}$ 的差集即是 $\mathscr{B}'$.

ii ⇒ iii 易见，对每一个 $l\geqslant 0$,

$$(z_l \cdots z_{l+N-1})=(x_l \cdots x_{l+N-1})$$

或
$$(z_l \cdots z_{l+N-1})=(y_l \cdots y_{l+N-1}).$$

据 ii, $z\in\Lambda$.

iii ⇒ iv 设 $x\in u$, 则 $x\in\Lambda$, 且有

$$x=(a_0 \cdots a_{n-1}\ x_n\ x_{n+1} \cdots).$$

同样，设 $y\in v$, 则 $y\in\Lambda$, 且

$$y=(y_0\ y_1 \cdots y_{n-N}\ a_{n-N+1} \cdots a_n\ y_{n+1} \cdots).$$

易见

$$x_i=y_i, \qquad i=n-N+1, \cdots, n-1$$

即 x 和 y 有连续 $N-1$ 个坐标对应相等，据 iii, 存在 $z\in u\cap v\cap\Lambda$, 即

$$u\cap v\neq\varnothing.$$

iv ⇒ i 设 $\mathscr{B}$ 是所有不出现在 Λ 内的 N-序列的集合. 易见

$$\Lambda\subset\Lambda_{\mathscr{B}}.$$

若 Λ 不是 N 阶的，则有

$$\Lambda\subsetneqq\Lambda_{\mathscr{B}}.$$

这蕴涵存在 $n+1$-序列

$$B=(a_0 \cdots a_n), \qquad (n>N)$$

使 B 出现在 $\Lambda_{\mathscr{B}}$ 内，但不出现在 Λ 内. 显然，能出现在 $\Lambda_{\mathscr{B}}$ 内的 N-序列也能出现在 Λ 内，故可设 $(b_0 \cdots b_{n-1})$ 出现在 Λ 内. 因此

$$u={}_0[a_0 \cdots a_{n-1}]\cap\Lambda\neq\varnothing.$$

又记
$$v={}_{n-N+1}[a_{n-N+1} \cdots a_n]\cap\Lambda.$$

因为 $(a_{n-N+1} \cdots a_n)$ 出现在 $\Lambda_{\mathscr{B}}$ 内，故也出现在 Λ 内，因而

$$v\neq\varnothing.$$

据 iv,
$$\varnothing\neq u\cap v={}_0[a_0 \cdots a_n]\cap\Lambda.$$

这与 $B=(a_0 \cdots a_n)$ 不出现在 Λ 内矛盾. 因此

$$\Lambda=\Lambda_{\mathscr{B}}.$$

即 Λ 是 N 阶有限型的. □

设 $\Lambda\in L(S^{\mathbf{Z}_+})$ 是 N 阶有限型的. 满足命题4中条件ii的 $\mathscr{B}'$, 叫作 Λ 或子转移 σ_Λ: $\Lambda\to\Lambda$ 的决定系统. 每一个有限型子转移都有一个决定系统. 下述命题说明, 只有2阶有限型子转移才是本质的.

命题5 任何有限型子转移都与一个2阶有限型子转移拓扑共轭.

证明 设 $\Lambda\in L(S^{\mathbf{Z}_+})$ 为 $N\geqslant 2$ 阶有限型子转移, $\mathscr{A}$ 是它的一个排除系统. 记

$$\mathscr{B}=\{B\mid |B|=N\text{ 且存在 }A\in\mathscr{A},\text{ 使 }A\prec B\}.$$

易见, 若 $x\in S^{\mathbf{Z}_+}$, 则 $\mathscr{A}$ 中每一个元素都不能出现在 x 内当且仅当 $\mathscr{B}$ 中每一个元素都不能出现在 x 内. 因此

$$\Lambda_{\mathscr{A}}=\Lambda_{\mathscr{B}}.$$

令

$$Q=\{B=(b_0\cdots b_{N-1})\mid \text{存在 }x\in\Lambda,\text{ 使 }B\prec x\},$$

即 Q 是 S 上所有可以出现在 Λ 内的 N-序列的集合. 把这样的 N-序列视为新的符号, Q 是由它们构成的新的状态空间, 因而得到一个新的符号空间 $Q^{\mathbf{Z}_+}$. 记其上的转移自映射为 σ'. 记 $\mathscr{B}'$ 是 Q 上满足下述性质的全体2-序列 (B, B') 的集合: 存在 $1\leqslant j\leqslant N-1$, 使得 $b_j\neq b'_{j-1}$, 其中

$$B=(b_0\cdots b_{N-1}),\qquad B'=(b'_0\cdots b'_{N-1}).$$

记 $\Lambda'=\Lambda_{\mathscr{B}'}\in L(Q^{\mathbf{Z}_+})$. 定义

$$\begin{cases}\pi: & \Lambda\to Q^{\mathbf{Z}_+},\\ & x\mapsto(B_0B_1\cdots),\end{cases}$$

其中 $B_l=(x_l\ x_{l+1}\ \cdots\ x_{l+N-1})$, $\forall l\geqslant 0$. 易见, 当 $x\in\Lambda$ 时, Q 上2-序列 (B_l, B_{l+1}) 不属于 $\mathscr{B}'$. 因此

$$\pi(\Lambda)\subset\Lambda'.$$

容易验证, π 是连续的, 一对一的, 且是满的, 因而是同胚的. 进

而，容易看出

$$\pi\sigma_A = \sigma'_{A'}\pi,$$

即 π 是 σ_A 和 $\sigma'_{A'}$ 之间的一个拓扑共轭，而后者是一个 2 阶有限型子转移. □

命题 5 是一个非常漂亮而又重要的结果，它把有限型子转移的讨论本质地归结为一种异常简单的形式，便于对它进行系统研究. 有限型子转移的讨论留待以后进行.

§10 符号动力系统的应用

符号动力系统有广泛应用. 其中，在诸如混沌物理学，编码理论，自动机理论和算法复杂性等方面的应用超出了本书范围，我们将不去涉及. 有兴趣的读者可参阅有关文献(如[7]和[12]). 本节下面讨论符号动力系统在动力系统一般理论研究中的应用，包括斯梅尔马蹄，转移不变集和拓扑熵映射的连续性问题. 符号动力系统还有另一方面的应用，那就是它是一个绝好的构造反例的工具，这方面的讨论将在本书第 6 章进行.

§10.1 斯梅尔马蹄

在符号动力系统广泛应用之中，最富思想性的和影响最为深远的，是著名的斯梅尔马蹄. 这是一个简单的数学模型，是斯梅尔在研究可微分自同胚的动力性状时于 1965 年构造出来的. 它解释和澄清了某些带根本性的动力系统基本问题，在动力系统研究中起了巨大的推动作用. 下面我们介绍这个数学模型(参见[23]，[42]).

在欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中取一个单位正方形

$$M = I \times I,$$

定义一个从 M 到 $\mathbb{R}^2$ 的在内同胚映射

$$f: \quad M \to \mathbb{R}^2$$

如下：先把 M 沿水平方向线性拉长 $\lambda(>2)$ 倍，再沿垂直方向压缩 λ 倍，得到一个 λ 单位长和 $1/\lambda$ 单位宽的长方形；再把这个长方形弯成马蹄形状放在 M 上，见图 10-1.

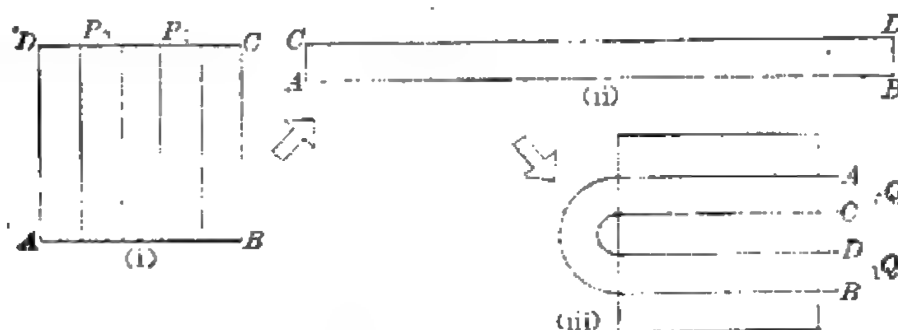


图 10-1

对于这样得到映射 f，下面将证明，M 有一个对 f 不变的闭子集 Λ，使 $f|_\Lambda$ 与 $(S^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ 拓扑共轭，其中 $(S^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ 是 2 个符号的双边符号动力系统.

记

$$M\cap f(M)={}_0Q\cup{}_1Q,$$

其中 ${}_0Q$、${}_1Q$ 是 M 内部水平平行不相交的两个长方形. 再记

$$P_0=f^{-1}({}_0Q),\quad P_1=f^{-1}({}_1Q).$$

易见，P_0、P_1 是 M 内部垂直平行不相交的两个长方形.

下设 $i_s\in\{0, 1\}$，$\forall s\in\mathbb{Z}$. 记

$$P_{i_0i_1}=P_{i_0}\cap f^{-1}(P_{i_1})=f^{-1}({}_{i_0}Q\cap P_{i_1}),$$

$${}_{i_{-1}i_{-2}}Q={}_{i_{-1}}Q\cap f({}_{i_{-2}}Q)=f(P_{i_{-1}})\cap f^2(P_{i_{-2}}).$$

易见，P_{i_00}、P_{i_01} 是 P_{i_0} 内部垂直平行不相交两个长方形，${}_{0i_{-1}}Q$、${}_{1i_{-1}}Q$ 是 ${}_{i_{-1}}Q$ 内部水平平行不相交两个长方形，而

$${}_{i_{-1}i_{-2}}Q\cap P_{i_0i_1}=\bigcap_{s=-2}^{1}f^{-s}(P_{i_s})$$

则是相应水平长方形与垂直长方形的交集，它是一个正方形，如图 10-2 所示.

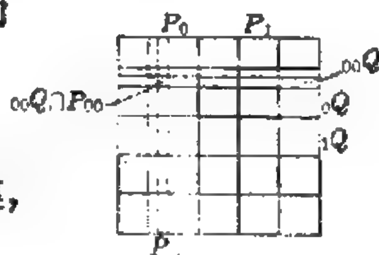


图 10-2

归纳地，对 $n>1$，记

$$P_{i_0i_1\cdots i_n}=\bigcap_{s=0}^{n}f^{-s}(P_{i_s}),$$

$$_{i_{-(n+1)}\cdots i_{-1}}Q=\bigcap_{s=0}^{n+1}f^{s}(P_{i_{-s}}),$$

其中 $P_{i_0\cdots i_{n-1}0}$，$P_{i_0\cdots i_{n-1}1}$ 是 $P_{i_1\cdots i_{n-1}}$ 内部垂直平行不相交的两个长方形；$_{0i_{-n}\cdots i_{-1}}Q$，$_{1i_{-n}\cdots i_{-1}}Q$ 是 $_{i_{-n}\cdots i_{-1}}Q$ 内部水平平行不相交的两个长方形；而

$$_{i_{-(n+1)}\cdots i_{-1}}Q\cap P_{i_0\cdots i_n}=\bigcap_{s=-(n+1)}^{n}f^{-s}(P_{i_s})$$

则是相应水平长方形与垂直长方形的交集，是一个正方形。

对每一点 $i=(\cdots i_{-n}\cdots i_{-1}\overset{*}{i_0}\,i_1\cdots i_n\cdots)\in S^{\mathbb{Z}}$，记

$$P_{i_0i_1\cdots i_n\cdots}=\bigcap_{s=0}^{\infty}f^{-s}(P_{i_s}),$$

$$_{\cdots i_{-n}\cdots i_{-1}}Q=\bigcap_{s=0}^{\infty}f^{s}(P_{i_{-s}}).$$

容易看出，$P_{i_0\cdots i_n\cdots}$ 是一串一个包含一个宽度趋于0的垂直长方形的交集。据拓扑学中的贝尔(R. L. Baire)定理和上述构造易于证明，它是包含在所有相应垂直长方形 $P_{i_0\cdots i_n}(\forall n\geqslant 0)$ 内部的一条垂直线段。同样，$_{\cdots i_{-n}\cdots i_{-1}}Q$ 是一串一个包含一个高度趋于0的平行长方形的交集，是一条包含在所有相应水平长方形 $_{i_{-n}\cdots i_{-1}}Q(\forall n>0)$ 内的线段，而

$$_{\cdots i_{-n}\cdots i_{-1}}Q\cap P_{i_0\cdots i_n\cdots}=\bigcap_{s=-\infty}^{\infty}f^{-s}(P_{i_s})$$

则是相应水平线段与垂直线段相交的单点集 $\{x\}$。易见

$$f^{s}(x)\in P_{i_s}.\qquad \forall s\in\mathbb{Z}$$

记 M 的子集合

$$\Lambda=\bigcup_{i\in S^{\mathbb{Z}}}{}_{\cdots i_{-n}\cdots i_{-1}}Q\cap P_{i_0\cdots i_n\cdots}=\bigcup_{i\in S^{\mathbb{Z}}}\bigcap_{s=-\infty}^{\infty}f^{-s}(P_{i_s}).$$

这个式子明显地决定了一个从 $S^{\mathbb{Z}}$ 到 Λ 的映射

$$h:\quad S^{\mathbb{Z}}\to\Lambda.$$

下面我们证明，Λ 是 M 的对 f 不变的紧致子集和 h 是一对一的连续映射，因而是同胚映射。最后证明 h 是从 σ 到 $f|_{\Lambda}$ 的拓扑共轭。

命题 1

$$\Lambda=\bigcap_{-\infty}^{\infty}f^{-s}(M),$$

因而 Λ 是对 f 不变的紧致子集.

证明 据 Λ 的定义,

$$\Lambda\subset\bigcap_{s=-\infty}^{\infty}f^{-s}(M)$$

是明显的.

下设 $x\in\bigcap_{s=-\infty}^{\infty}f^{-s}(M)$. 因为

$$M\cap f(M)={}_0Q\cup{}_1Q,\qquad f^{-1}(M)\cap M=P_0\cup P_1,$$

故

$$x\in{}_{i_{-1}}Q\cap P_{i_0},\qquad i_0,i_{-1}\in\{0,1\}.$$

容易归纳证明,存在 $i_{-(n+1)},\cdots,i_{-1},i_0,\cdots,i_n\in\{0,1\}$,使

$$x\in{}_{i_{-(n+1)}\cdots i_{-1}}Q\cap P_{i_0\cdots i_n}.$$

因此,存在 $i\in S^{\mathbf{Z}}$,使得

$$x\in{}_{\cdots i_{-n}\cdots i_{-1}}Q\cap P_{i_0\cdots i_n\cdots},$$

即 $x\in\Lambda$.

因为 M 是紧致的,据吉洪诺夫定理,Λ 也是紧致的. Λ 对 f 不变是明显的. 证毕

命题 2

$$h:\qquad S^{\mathbf{Z}}\to\Lambda$$

是在上的同胚映射.

证明 从 h 的上述定义易见,h 是一对一的,且

$$h(S^{\mathbf{Z}})=\Lambda.$$

下面证明 h 的连续性.

设 $x\in\Lambda$. 令 $i=(\cdots i_{-n}\cdots i_{-1}\,\overset{*}{i_0}\,i_1\cdots i_n\cdots)\in S^{\mathbf{Z}}$,使

$$h(i)=x.$$

从上述构造易见,对任意 $n>0$,

$${}_{i_{-(n+1)}\cdots i_{-1}}Q\cap P_{i_0\cdots i_n}\cap\Lambda$$

是 x 的一个邻域(注意,这个集合在 Λ 内既开又闭),而

$$ {}_{-(n+1)}[i_{-(n+1)} \cdots i_{-1}\, i_0\, i_1 \cdots i_n]_n $$

则是 $S^{\mathbf{Z}}$ 内包含 i 的一个柱形. 易见,后者的 h 象刚好就是前者. 这就证明了 h 的连续性. 因为 $S^{\mathbf{Z}}$ 和 Λ 都是紧致可度量的,故一一连续映射 h 是它们之间的一个同胚映射. □

命题 3

$$ h: \quad S_{\mathbf{Z}} \to \Lambda $$

是从 σ 到 $f|_\Lambda$ 的拓扑共轭,即

$$ h\sigma = f|_\Lambda h. $$

证明 直接验证. 设 $i = (\cdots i_{-n} \cdots i_{-1}\, \overset{*}{i_0}\, i_1 \cdots i_n \cdots) \in S^{\mathbf{Z}}$,则

$$ \sigma(i) = (\cdots i_{-n} \cdots i_{-1}\, i_0\, \overset{*}{i_1} \cdots i_n \cdots), $$

而 $$ h\sigma(i) = {}_{\cdots i_{-n} \cdots i_{-1} i_0}Q \cap P_{i_1 \cdots i_n \cdots} = \bigcap_{s=-\infty}^{\infty} f^{-s}(P_{i_{s+1}}). $$

另一方面,

$$ \begin{aligned} f|_\Lambda h(i) &= f(({}_{\cdots i_{-n} \cdots i_{-1}}Q \cap P_{i_0 \cdots i_n \cdots})) \\ &= f\Big(\bigcap_{s=-\infty}^{\infty} f^{-s}(P_{i_s})\Big) = \bigcap_{s=-\infty}^{\infty} f^{-(s-1)}(P_{i_s}) \\ &= \bigcap_{s=-\infty}^{\infty} f^{-s}(P_{i_{s+1}}) = h\sigma(i). \end{aligned} $$ □

上面完成了 f 有一个子系统与 2-双边符号动力系统拓扑共轭的证明. 这就是所谓的斯梅尔马蹄模型.

斯梅尔马蹄模型构造可以作种种改变,例如,可以沿垂直方向线性拉长而沿水平方向线性压缩,并以种种方式弯成马蹄形状或类马蹄形状放回到原来的图形上去. 进而,拉长和压缩可以不必是线性的,形成种种曲边的马蹄模型,等等. 读者可参阅有关文献,我们这里不再讨论下去.

§10.2 转移不变集

到目前为止,转移自映射的动力性状大体上已经清楚了. 它们是很基本和很典型的. 判断一个一般系统是否具有符号动力系统

的这些动力性状和在什么条件具有这些动力性状，例如，拓扑熵在什么条件下大于0和在什么条件下是混沌的，等等，是拓扑动力系统研究的一个重要内容．通过拓扑共轭或半共轭把一个紧致系统与转移自映射相比较，是拓扑动力系统研究中的一个重要和普遍使用的方法，具有广泛而重要的应用．下面我们给出紧致系统与转移自映射拓扑共轭和半共轭的充要条件(参见[43])．

设(X, f)为紧致系统．

定义1 对于闭子集$A\subset X$，如果A对f不变且子系统

$$f|_A:\ A\to A$$

与k阶转移自映射拓扑共轭，即存在在上同胚映射

$$h:\ A\to S^{\mathbf{Z}_+},$$

使得下述图表交换

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f|_A} & A \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ S^{\mathbf{Z}_+} & \xrightarrow[\sigma]{} & S^{\mathbf{Z}_+}, \end{array}$$

即
$$hf|_A=\sigma h,$$

则A叫作f的$k(\geqslant 2)$阶转移不变集．

如果上面的h仅仅是在上连续的，则称A是f的一个k阶伪转移不变集．

我们先引进一个重要引理，其证明从略．

引理 设A和B是X的子集合，则

$$f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B.$$

下面给出f有k阶转移不变集的充要条件．

命题4[43] f有k阶转移不变集的充要条件是存在两两不相交的紧致子集

$$A_0,\ \cdots,\ A_{k-1}\subset X,$$

满足

i) $f(A_i)\supset\bigcup\limits_{s=0}^{k-1} A_s,\qquad i=0,\ \cdots,\ k-1$

ii) $\#\left(\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s})\right)\leqslant 1.\qquad \forall (i_0\, i_1 \cdots)\in S^{\mathbf{Z}_+}$

证明 先证明必要性. 设 $A\subset X$ 是 f 的一个 k 阶转移不变集,即存在在上的同胚映射

$$h:\quad A\to S^{\mathbf{Z}_+},$$

使得

$$hf|_A=\sigma h.$$

记 $$B_i=\{x=(x_0\, x_1\cdots)\in S^{\mathbf{Z}_+}|x_0=i\},$$
$$A_i=h^{-1}(B_i).\qquad i=0,\ \cdots,\ k-1$$

显然, $A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_{k-1}$ 是 A 的两两不相交的闭子集,且

i) $f(A_i)=fh^{-1}(B_i)=h^{-1}\sigma(B_i)=h^{-1}(S^{\mathbf{Z}_+})$

$$=A\supset\bigcup_{s=0}^{k-1}A_s,\qquad i=0,\ \cdots,\ k-1$$

ii) $\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s})=\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}h^{-1}(B_{i_s})=\bigcap_{s=0}^{\infty} h^{-1}\sigma^{-s}(B_{i_s})$

$$=h^{-1}\bigcap_{s=0}^{\infty}\sigma^{-s}(B_{i_s})=h^{-1}((i_0\, i_1\cdots)),$$

最后一式由于 h 是同胚映射因而是单点集. 即我们有

$$\#\left(\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s})\right)=1.\qquad \forall (i_0\, i_1\cdots)\in S^{\mathbf{Z}_+}$$

下面证明充分性. 先证明,对任意 $l>0$ 和 $S=\{0,\ 1,\ \cdots,\ k-1\}$ 上任意序列 $(i_0\cdots i_l)$,我们有

$$f^l\left(\bigcap_{s=0}^{l} f^{-s}(A_{i_s})\right)=A_{i_l}.\qquad (*)$$

当 $l=1$ 时,显然成立. 设上式对 l 已成立. 利用引理,我们有

$$\begin{aligned}f^{l+1}\left(\bigcap_{s=0}^{l+1} f^{-s}(A_{i_s})\right)&=f\cdot f^l\left(\bigcap_{s=0}^{l} f^{-s}(A_{i_s})\cap f^{-l}\cdot f^{-1}(A_{i_{l+1}})\right)\\&=f\left(f^l\bigcap_{s=0}^{l} f^{-s}(A_{i_s})\cap f^{-1}(A_{i_{l+1}})\right)\\&=f(A_{i_l}\cap f^{-1}(A_{i_{l+1}}))\\&=f(A_{i_l})\cap A_{i_{l+1}}=A_{i_{l+1}}.\end{aligned}$$

据归纳法，(*)对所有 $l>0$ 已成立．据康托交的性质，我们有

$$\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) \neq \varnothing.$$

据假设，$\forall (i_0 i_1 \cdots) \in S^{\mathbb{Z}_+}$，

$$\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s})$$

是单点集．下面把这个单点集与它所含的点等同起来．

记 $$C = A_0 \cup \cdots \cup A_{k-1},$$

且 $$A = \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(C) = \bigcup_{(i_0 i_1 \cdots) \in S^{\mathbb{Z}_+}} \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}).$$

因为 C 是紧致的，每一个 $f^{-s}(C)$ 也是紧致的，据吉洪诺夫定理，A 也是紧致的．显然

$$f(A) \subset A.$$

定义映射

$$\begin{cases} h: & A \to S^{\mathbb{Z}_+}, \\ & \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) \mapsto (i_0 i_1 \cdots). \end{cases}$$

因为 $A_0, \cdots, A_{k-1}$ 两两不相交，易于验证 h 是一一的．下面证明 h 是连续的．

任取 $x \in A$．设

$$h(x) = (i_0 i_1 \cdots).$$

对任意 $n>0$，考虑柱形 ${}_0[i_0\ i_1 \cdots i_{n-1}]$．取 $y \in A$ 与 x 充分接近，并设

$$y = \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{j_s}),$$

因而

$$h(y) = (j_0\ j_1 \cdots).$$

因为 $$f^s(x) \in A_{i_s}, \qquad s = 0, 1, \cdots, n-1$$

据 f 的连续性且考虑到 $A_0, \cdots, A_{k-1}$ 两两不相交，可设

$$f^s(y) \in A_{i_s}, \qquad s = 0, \cdots, n-1$$

即 $$y = (A_{i_0} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}}) \cap \left(\bigcap_{s=n}^{\infty} f^{-s}(A_{j_s})\right).$$

据 h 的定义，显然有

$$h(y) \in {}_0[i_0\ i_1\ \cdots\ i_{n-1}].$$

这证明 h 在 x 处连续. $x \in A$ 是任意的，故 h 在 A 上连续. 因 A 和 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 均是紧致豪斯多夫的，故 h^{-1} 亦连续，因而 h 是同胚映射.

还须证明

$$hf|_A = \sigma h.$$

设

$$\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) = \{x\}, \qquad (i_0 i_1 \cdots) \in S^{\mathbb{Z}_+}$$

即有

$$f^s(x) \in A_{i_s}. \qquad s = 0,\ 1,\ \cdots$$

显然 $\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_{s+1}}) = \{f(x)\}$，因此

$$\begin{aligned} hf(x) &= (i_1\ i_2\ \cdots\ ) = \sigma((i_0\ i_1\ \cdots)) \\ &= \sigma h\left(\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s})\right) = \sigma h(x). \end{aligned}$$ □

显然，命题 4 中条件 i 是 f 有 k 阶伪转移不变集的充要条件.

作为命题 4 的应用，我们证明著名的 Bowen-Franks 定理的定性部分. 这个定理的原始证明要用到同调论(见[16]).

命题 5 (Bowen-Franks) 设 $g \in C^0(I)$，则 g 有非 2 方幂周期蕴涵 $\mathrm{ent}(g) > 0$.

证明 据沙尔可夫斯基定理(§7 的命题 1)，存在 $n > 0$，使 g^n 有周期 3. 记 $h = g^n$. 不失普遍性，可设存在 $a \in I$，使

$$h^3(a) = a < h(a) < h^2(a). \text{(图 10-3)}$$

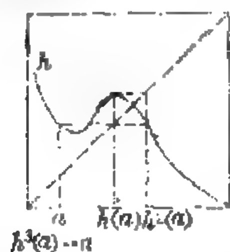


图 10-3

记

$$K_0 = [a,\ h(a)], \quad K_1 = [h(a),\ h^2(a)].$$

我们有

$$h(K_0) \supset K_1, \quad h(K_1) \supset K_0 \cup K_1.$$

显然，$h^2(K_0) \supset K_0 \cup K_1$. 又存在 $b \in K_1$，使 $h(b) = h(a)$. 因此，

$$h([b,\ h^2(a)])\supset[a,\ h(a)]\supset K_0,$$
$$h^2([b,\ h^2(a)])\supset K_1,$$
$$h^3([b,\ h^2(a)])\supset K_0\cup K_1.$$

于是

$$h^3(K_0)\cap h^3([b,\ h^2(a)])\supset K_0\cup K_1.$$

显然，$K_0\cap[b,\ h^2(a)]=\varnothing$．据命题 4，$h^3$ 有 2 阶伪转移不变集．据 § 6 的命题 9 和 § 8 的命题 7，我们有

$$\mathrm{ent}(g^{3n})=\mathrm{ent}(h^3)\geqslant\mathrm{ent}(\sigma)=\log 2>0.$$

而据 § 6 的命题 6，即得

$$\mathrm{ent}(g)\geqslant\frac{1}{3n}\log 2>0. \qquad \square$$

下面作为马蹄思想和命题 4 的应用，我们讨论线段自映射的拓扑熵的一个问题．

设 $f\in C^0(I)$．如果存在 I 的一个有限分割

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_N<1,$$

使得 f 在$[0,\ a_1]$，$[a_1,\ a_2]$，…，$[a_N,\ 1]$ 上都是线性的，则说 f 是分段线性的．

一个分段线性线段自映射，除了拐点之外都有确定的斜率．如果一个分段线性线段自映射每一点的斜率的绝对值是一个常数(在拐点处左和右斜率的绝对值相同)，就说这个分段线性线段自映射有常斜率．

我们需要下述结果，但略去证明．有兴趣的读者可参阅[25]．

命题 6 设 $f\in C^0(I)$分段线性，具有常斜率 $\lambda>0$，则

$$\mathrm{ent}(f)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0<\lambda\leqslant 1 \text{ 时;}\\ \log\lambda, & \text{当 } \lambda\geqslant 1 \text{ 时.}\end{cases}$$

下面我们构造一类特殊的分段线性线段自映射．

任取内点 $a\in I$，且取 $\varepsilon>0$，使

$$V(a,\ \varepsilon)=(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)\subset I.$$

定义 $f\in C^0(I)$，使得

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } x\in[0,\ a-\varepsilon] \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x=\dfrac{2a-\varepsilon}{2} \text{ 时;} \\ x, & \text{当 } x=a \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } x=\dfrac{2a+\varepsilon}{2} \text{ 时;} \\ x, & \text{当 } x\in[a+\varepsilon,\ 1] \text{ 时,} \end{cases}$$

且 f 在 $\left[a-\varepsilon,\ \dfrac{2a-\varepsilon}{2}\right]$，$\left[\dfrac{2a-\varepsilon}{2},\ a\right]$，$\left[a,\ \dfrac{2a+\varepsilon}{2}\right]$ 和 $\left[\dfrac{2a+\varepsilon}{2},\ a+\varepsilon\right]$ 上分别是由 f 在两个端点上的值决定的线性函数(如图 10-4 所示).

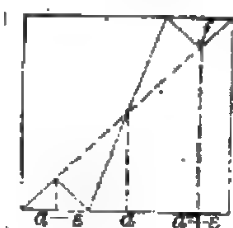


图 10-4

易见

$$f(V(a,\ \varepsilon))=I.$$

为了方便起见，我们称这个 f 在 $V(a,\ \varepsilon)$ 上有拟马蹄构造.

下设 $N>0$. 任取 I 的分割

$$0<a_1<\cdots<a_N<1,$$

并设 $\varepsilon>0$, 使

$$V(a_i,\ \varepsilon)\subset I, \qquad i=1,\ \cdots,\ N$$

且 $$V(a_i,\ \varepsilon)\cap V(a_j,\ \varepsilon)=\varnothing. \qquad 0<i<j\leqslant N$$

设 $f_i\in C^0(I)$ 在 $V(a_i,\ \varepsilon)$ 上有拟马蹄构造, $i=1,\ \cdots,\ N$. 定义 $f\in C^0(I)$, 使得

$$f(x)=\begin{cases} f_i(x), & \text{当 } x\in V(a_i,\ \varepsilon) \text{ 时}, i=1,\ \cdots,\ N; \\ x, & \text{当 } x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{N} V(a_i,\ \varepsilon) \text{ 时.} \end{cases}$$

易见,

$$f(V(a_j,\ \varepsilon))\supset\bigcup_{i=1}^{N} V(a_i,\ \varepsilon). \qquad j=1,\ \cdots,\ N$$

据命题 4, f 有 N 阶伪转移不变集, 因而

$$\operatorname{ent}(f)\geqslant\log N.$$

我们称这样的 $f\in C^0(I)$"有 N 型拟马蹄构造"。

命题 7 设 $T\geqslant 0$. 则存在 $f\in C^0(I)$, 使

$$\operatorname{ent}(f)=T.$$

证明 先设 $0<T<\infty$. 构造 $f\in C^0(I)$如下：取 I 的有限分割

$$0=C_0<C_1<\cdots<C_m\leqslant 1,$$

使得

$$C_1-C_0=C_2-C_1=\cdots=C_m-C_{m-1}=10^{-T},\quad 1-C_m\leqslant 10^{-T}.$$

定义映射

$$\bar{f}:\ \{C_0,\ \cdots,\ C_m\}\to I,$$

使

$$\bar{f}(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=C_{2i} \text{ 时}, 0\leqslant 2i\leqslant m;\\ 1, & \text{当 } x=C_{2i+1} \text{ 时}, 0<2i+1\leqslant m.\end{cases}$$

令 $f:\ I\to I$ 是 $\bar{f}$ 到 I 上的连续扩充，满足下述条件：

i) 如果 $C_m<1$, 则

$$f(1)=\begin{cases}\dfrac{1-C_m}{10^T}, & \text{当 } m \text{ 是偶数时},\\[2ex] 1-\dfrac{1-C_m}{10^T}, & \text{当 } m \text{ 是奇数时};\end{cases}$$

ii) f 在每一个$[C_i,\ C_{i+1}]$和$[C_m,\ 1]$上是 $\bar{f}$ 在两个端点上的值决定的线性函数，$i=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1$.

易见，f 是完全确定和连续的，且斜率$=10^T$. 据命题 6，得

$$\operatorname{ent}(f)=\log 10^T=T.$$

下设 $T=+\infty$. 取 I 的一个无限分割

$$0=C_0<C_1<\cdots<C_m<\cdots<1,$$

在线段$[C_i,\ C_{i+1}]\subset I$ 上构造 f_i 使具有 $i+1$ 型拟马蹄构造，$\forall i\geqslant 0$. 定义

$$f:\ I\to I,$$

使每一个$[C_i,\ C_{i+1}]$对 f 不变，且

$$f|_{[C_i,C_{i+1}]}=f_i,\qquad \forall i\geqslant 0$$

从 f_i 的定义易见，f 是连续的，即 $f\in C^0(I)$. 又，显然

$$\mathrm{ent}(f)\geqslant\mathrm{ent}(f_i)\geqslant\log(i+1), \qquad \forall i\geqslant 0$$

因此

$$\mathrm{ent}(f)=+\infty.$$

存在$f\in C(I)$，使

$$\mathrm{ent}(f)=0$$

是明显的.命题证毕.

以上关于线段自映射的结果很容易推广到圆周自映射上去，这里不作讨论. §10.3 将把这些一维动力系统的结果推广到高维情形，讨论关于拓扑熵的另一个重要问题，即拓扑熵映射的连续性问题.

§10.3 拓扑熵映射的连续性

设(X, d)为紧致度量空间. 在§1中我们曾在X上全体连续自映射的集合$C^0(X)$上引进了一个度量

$$\rho(f, g)=\sup_{x\in X}\{d(f(x), g(x))\}, \qquad \forall f, g\in C^0(X)$$

并称由ρ诱导的$C^0(X)$的拓扑为C^0-拓扑或一致收敛拓扑. 在这个拓扑下，$C^0(X)$是完备的，即$C^0(X)$上每一个柯西序列在$C^0(X)$内有极限点.

下面我们讨论一个与以前性质不大相同的问题，即对给定的一个紧致系统(X, f)或$f\in C^0(X)$，f作为完备度量空间$C^0(X)$中的一个点，当它受到微小扰动时，它的动力性状如何改变这样一个问题. 其中特别重要的是，拓扑熵函数或映射的连续性问题.

对每一个$f\in C^0(X)$，它的拓扑熵$\mathrm{ent}(f)$是一个非负实数. 因此有如下函数:

$$\mathrm{ent}: C^0(X)\to\bar{\mathbb{R}}^+,$$

其中$\bar{\mathbb{R}}^+=[0, \infty)\cup\{\infty\}$. ent 叫作"$C^0(X)$上的拓扑熵函数或拓扑熵映射. 一个自然的问题是: 拓扑熵映射是连续的吗? 作为符号动力系统的应用，下面将对这个问题作比较系统的讨论. 但是，这里对底空间X作一点限制，即设X是有限维紧致流形(更广泛的

情形可参见[39])。

下面除非另有声明，恒设 $X=M^n$ 为 n 维紧致流形($n\geqslant 1$)。先引进一些符号和术语。

设 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $r>0$，并设 d 为 $\mathbb{R}^n$ 上的通常度量。记

$$B^n(x,\ r)=\{y\in\mathbb{R}^n\mid d(x,\ y)\leqslant r\},$$

$$\dot{B}^n(x,\ r)=\{y\in\mathbb{R}^n\mid d(x,\ y)<r\}$$

和

$$S^{n-1}(x,\ r)=\{y\in\mathbb{R}^n\mid d(x,\ y)=1\}.$$

当 $r=1$ 时，r 将被略去。同样，当 x 为 $\mathbb{R}^n$ 的原点时，x 亦被略去。

引理 1 设

$$h:\qquad B^n\to B^n$$

连续，且 $h|S^{n-1}=\mathrm{id}$，即 h 限制在 B^n 的边界上是恒同。则

$$h(B^n)=B^n,$$

即 h 是满映射。

这是代数拓扑中相当于布劳韦尔(L. E. J. Brouwer)不动点定理的一个结果(参见[2]和[6])。

引理 2 集合

$$\{f\in C^0(M^n)\mid P(f)\neq\varnothing\}$$

在 $C^0(M^n)$ 中处处稠密。

这是C^0-封闭引理的一个简单推论。所谓 C^0-封闭引理是说，任给 $f\in C^0(M^n)$ 和 $x\in\Omega(f)$，则对 f 在 $C^0(M^n)$ 中的任意邻域 $N(f)$，存在 $g\in N(f)$，使得 x 是 g 的周期点。如引用一些代数拓扑的基本知识，C^0-封闭引理是很容易证明的，这里从略。

引理 3 设 $0<r_4<r_3<r_2<r_1<1$，并设连续映射

$$h:\qquad B^n(r_2)\to B^n$$

使得

$$h(S^{n-1}(r_2))\subset B^n-B^n(r_1),\qquad h(S^{n-1}(r_3))\subset\dot{B}^n(r_4)$$

和连续映射

$$g:\qquad S^{n-1}\cup S^{n-1}(r_2)\to B^n-B^n(r_1)$$

有一个连续扩充

$$G:\qquad B^n-\dot{B}^n(r_2)\to B^n-B^n(r_1),$$

这里 $g|S^{n-1}=\mathrm{id}$，$g|S^{n-1}(r_2)=h|S^{n-1}(r_2)$。

则 $$h(B^n(r_2)-\dot{B}^n(r_3))\supset B^n(r_1)-\dot{B}^n(r_4).$$

证明 定义连续映射

$$f:\quad B^n\to B^n,$$

使得 $$f(x)=\begin{cases}h(x), & \text{当 } x\in B^n(r_2)-\dot{B}^n(r_3)\text{ 时};\\ th(q), & \text{当 } x=t_q,\ q\in S^{n-1}(r_3)\text{ 时}, t\in I;\\ G(x), & \text{当 } x\in B^n-\dot{B}^n(r_2)\text{ 时},\end{cases}$$

如图 10-5 所示。

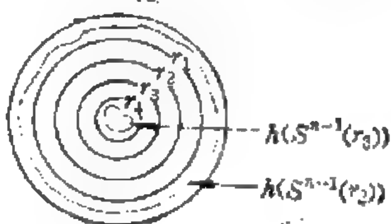


图 10-5

显然，

$$f|S^{n-1}=G|S^{n-1}=\mathrm{id}.$$

据引理 1，

$$f(B^n)=B^n.$$

由上述定义，易见

$$f(B^n(r_3))\subset\dot{B}^n(r_4),$$
$$f(B^n-\dot{B}^n(r_2))\subset B^n-B^n(r_1).$$

因此

$$f(B^n(r_2)-\dot{B}^n(r_3))=h(B^n(r_2)-\dot{B}^n(r_3))$$
$$\supset B^n(r_1)-\dot{B}^n(r_4).$$ □

下设 $N>1$, $r\in I$ 和

$$h:\quad B^n(r)\to B^n$$

连续。

定义 2 如果

i) 存在 $r>r_0>r_1>\cdots>r_{N+1}>0$, 使得

$$h(S^{n-1}(r_i))\subset\begin{cases}B^n-B^n(r), & \text{当 } 0\leqslant i\leqslant N,\ i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\text{ 时},\\ \dot{B}^n(r_{N+1}), & \text{当 } 0\leqslant i\leqslant N,\ i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\text{ 时};\end{cases}$$

ii) 当 $i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, $0\leqslant i\leqslant N$ 时，映射

$$h_i:\quad S^{n-1}\cup S^{n-1}(r_i)\to B^n-B^n(r)$$

有连续扩充 $\quad H_i:\ B^n-\dot{B}^n(r_i)\to B^n-B^n(r),$

其中 $\quad h_i|S^{n-1}=\mathrm{id},\ h_i|S^{n-1}(r_i)=h|S^{n-1}(r_i),\qquad 0\leqslant i\leqslant N$

这时，称 h"具有 N 型拟马蹄结构"，或 h 是"N 型拟马蹄映射"。

记从 $B^n(r)$ 到 B^n 的全体连续映射的集合为 $C^0(B^n(r),\ B^n)$。

可以类似 $C^0(X)$ 的情况，在 $C^0(B^n(r),\ B^n)$ 上引进度量，并同样称所诱导的拓扑为 C^0-拓扑或一致收敛拓扑.

引理 4 N 型拟马蹄结构在 C^0-小扰动下保持不变.

证明 从定义 2 可以看出，N 型拟马蹄映射 h 在 C^0-小扰动下 i 和 ii 均保持不变. □

引理 5 设 $h\in C^0(B^n(r),\ B^n)$ 为 N 型拟马蹄映射，则 $B^n(r)$ 有不相交闭子集 $A_0,\ \cdots,\ A_{N-1}$，使得

$$h(A_j)\supset\bigcup_{i=0}^{N-1}A_i. \qquad j=0,\ \cdots,\ N-1$$

证明 据引理 2，我们有

$$h(B^n(r_i)-\mathring{B}^n(r_{i+1}))\supset B^n(r)-\mathring{B}^n(r_{N+1}), \qquad i=0,\ \cdots,\ N-1$$

据定义 2，不难看出，存在闭子集

$$A_i\subset\mathring{B}^n(r_i)-B^n(r_{i+1}),$$

使得

$$h(A_i)=B^n(r)-\mathring{B}^n(r_{N+1}). \qquad i=0,\ \cdots,\ N-1$$

显然，$A_0,\ \cdots,\ A_{N-1}$ 两两不相交，且

$$h(A_j)\supset\bigcup_{i=0}^{N-1}A_i. \qquad j=0,\ \cdots,\ N-1 \quad □$$

下面设 $f\in C^0(M^n)$ 和 $N>0$.

定义 3 如果存在点 $x\in M^n$ 和 x 的邻域 $V(x)$ 以及局部坐标同胚映射

$$\psi:\qquad \overline{V(x)}\to B^n,$$

满足

i) 存在 $k>0$ 和 $r\in(0,\ 1]$，使得

$$f^k(V_r(x))\subset V(x),$$

其中 $V_r(x)=\psi^{-1}(B^n(r))$；

ii) 映射

$$\psi f^k\psi^{-1}:\qquad B^n(r)\to B^n$$

具有 N^k 型拟马蹄结构，

这时，我们称 f 是 N 型拟马蹄映射．或 f 有 N 型拟马蹄结构．

$$\begin{array}{ccc} V_r(x) & \xrightarrow{f^k} & V(x) \\ \uparrow \psi^{-1} & & \downarrow \psi \\ B^n(r) & \xrightarrow[\psi f^k \psi^{-1}]{} & B^n \end{array}$$

用 $C_N^0(M^n)$表示 $C^0(M^n)$中全体 N 型拟马蹄映射的集合，$\forall N>0$．

引理 6 设 $f\in C^0(M^n)$．又设 $p\in M^n$，且对 $\varepsilon>\delta>0$ 有

$$f(V(p,\ \delta))\subset V(f(p),\ \varepsilon),$$

则对任意 $0<\delta_0<\delta$，可定义 $g\in C^0(M^n)$，使得

$$g|M^n-V(p,\ \delta)=f|M^n-V(p,\ \delta),$$

$$g|_{\overline{V(p,\delta_0)}}:\quad V(p,\ \delta_0)\rightarrow V(f(p),\ \varepsilon)$$

为在内同胚映射．还有，

$$g(V(p,\ \delta))\subset V(f(p),\ \varepsilon).$$

证明 因为$\overline{V(x,\ \delta)}$同胚于 B^n，故是一个可剖空间．利用实体球的可缩性质和绝对同伦扩充性质，这样的 g 是可以定义的．这里略去证明细节，有兴趣的读者可参阅[31]和[39]．

命题 8 $C_N^0(M^n)$是 $C^0(M^n)$的处处稠密开子集．

证明 据引理 4，很容易看出$C_N^0(M^n)$在 $C^0(M^n)$ 中是开的．下面证明它处处稠密．

设 $\varepsilon>0$ 和 $f\in C^0(M^n)$．据引理 2，不妨设 $P(f)\neq\varnothing$．设 $\{p,\ f(p),\ \cdots,\ f^{k-1}(p)\}$ 是 f 的一个 k-周期轨道，$k\geqslant 1$．取 $\varepsilon>\varepsilon_k>\cdots>\varepsilon_0>0$，使

$$f(V(f^i(p),\ \varepsilon_i))\subset V(f^{i+1}(p),\ \varepsilon_{i+1}),\qquad i=0,\ \cdots,\ k-1$$

利用引理 6 证明中使用的方法，对 $\varepsilon_0>\delta_1>\delta_2>0$，可以定义 $f_1\in C^0(M^n)$，使得

i) $f_1|M^n-V(p,\ \varepsilon_0)=\mathrm{id}$;

ii) $f_1|_{\overline{V(p,\delta_1)}}:\ \overline{V(p,\ \delta_2)}\rightarrow\overline{V(p,\ \delta_1)}$具有 N^k 型拟马蹄结构；

iii) $f_1(p)=p$，且 $f_1(V(p,\ \varepsilon_0))\subset V(p,\ \varepsilon_0)$．

易见 $f_1\in N(\mathrm{id},\ \varepsilon)$，其中 $N(\mathrm{id},\ \varepsilon)$是恒同映射 id 在 $C^0(M^n)$中的 ε-球形邻域.

据引理 6，可以定义 $f_2\in C^0(M^n)$，满足

1) $f_2|\overline{V(f^i(p),\ \varepsilon_i)}$是从 $\overline{V(f^i(p),\ \varepsilon_i)}$ 到 $V(f^{i+1}(p),\ \varepsilon_{i+1})$ 的在内同胚映射，且 $f_2(f^i(p))=f^{i+1}(p)$，$i=0,\ \cdots,\ k-1$；

2) $f_2|M^n-\bigcup\limits_{i=0}^{k-1}V(f^i(p),\ \varepsilon_i)=f|M^n-\bigcup\limits_{i=0}^{k-1}V(f^i(p),\ \varepsilon_i)$.

易见，$f_2\in N(f,\ \varepsilon)$. 记

$$g=f_2f_1.$$

显然有 $g\in N(f,\ \varepsilon)$. 容易从上述构造中看出，g 有 N 型拟马蹄构造. 证毕.

命题 9 若 $f\in C^0_N(M^n)$，则

$$\mathrm{ent}(f)\geqslant\log N. \qquad \forall N>0$$

证明 设 $f\in C^0_N(M^n)$. 据定义 3，存在 $x\in M^n$ 和坐标映射

$$\psi:\qquad \overline{V(x)}\to B^n,$$

使

$$\psi f^k\psi^{-1}:\ B^n(r)\to B^n$$

具有 N^k 型拟马蹄结构，其中

$$f^k(V_r(x))\subset V(x). \qquad r\in(0,\ 1]$$

据引理 5，存在 $B^n(r)$的两两不相交闭子集 $A_0,\ \cdots,\ A_{N^k-1}$，使得

$$\psi f^k\psi^{-1}(A_j)\supset\bigcup_{i=0}^{N^k-1}A_i. \qquad j=0,\ \cdots,\ N^k-1$$

易见 $\psi^{-1}(A_0),\ \cdots,\ \psi^{-1}(A_{N^k-1})$ 是 $\overline{V_r(x)}$ 的两两不相交闭子集，且

$$f^k\psi^{-1}(A_j)\supset\bigcup_{i=0}^{N^k-1}\psi^{-1}(A_i). \qquad j=0,\ \cdots,\ N^k-1$$

据命题 4，f^k 有 N^k 阶伪转移不变集，故

$$\mathrm{ent}(f)=\frac{1}{k}\,\mathrm{ent}(f^k)\geqslant\frac{1}{k}\log N^k=\log N. \qquad \square$$

命题 10 拓扑熵映射

$$\text{ent:}\qquad C^0(M^n)\to\mathbb{R}^+$$

是在上的，即 $\text{ent}(C^0(M^n))=\mathbb{R}^+$.

证明　设 $T\geqslant 0$. 在 M^n 中任取简单闭弧 $\widehat{ab}$. $\widehat{ab}$ 可视为线段. 据命题 7, 存在 $\bar{f}\in C^0(\widehat{ab})$, 使

$$\text{ent}(\bar{f})=T.$$

因为 M^n 是正规空间，据 Tietze 扩充引理[0]，存在 $\bar{f}$ 到 M^n 上的连续扩充

$$f:\qquad M^n\to\widehat{ab}\subset M^n.$$

显然，$\text{ent}(f)=\text{ent}(\bar{f})=T$. □

命题 11　集合

$$\{f\in C^0(M^n)\mid \text{ent}(f)>C\}\qquad \forall C>0$$

包含 $C^0(M^n)$ 中一个处处稠密的开子集.

这个结果是命题 8 和命题 9 的直接推论.

命题 12　集合

$$\{f\in C^0(M^n)\mid f\text{ 在李-约克意义下混沌}\}$$

是 $C^0(M^n)$ 的一个处处稠密的子集.

证明　设 $f\in C^0(M^n)$. 据引理 2, 可设

$$\{p,\ f(p),\ \cdots,\ f^{k-1}(p)\}$$

是 f 的一个 k-周期轨道，$k\geqslant 1$.

设 $\varepsilon>0$. 取 $\varepsilon>\varepsilon_k>\cdots>\varepsilon_0>0$, 使

$$f(V(f^i(p),\ \varepsilon_i))\subset V(f^{i+1}(p),\ \varepsilon_{i+1}),\qquad i=0,\ \cdots,\ k-1$$

在 $V(p,\ \varepsilon_0)$ 内任取简单弧 $\widehat{pa}$, 定义 $f_1\in C^0(M^n)$, 使

i) $f_1(\widehat{pa})\subset\widehat{pa}$ 且 $f_1|_{\widehat{pa}}$ 有 N 型拟马蹄结构，$N>1$ (见 § 10.2);

ii) $f_1|M^n-V(p,\ \varepsilon_0)=\text{id}$.

易见 $f_1\in N(\text{id},\ \varepsilon)$, 其中 id 是 $C^0(M^n)$ 恒同映射.

定义 $f_2\in C^0(M^n)$, 使得

1) $f_2|_{\widehat{f^i(p)f^i(a)}}:\ \widehat{f^i(p)f^i(a)}\to\widehat{f^{i+1}(p)f^{i+1}(a)}$ 是同胚映射，使 $f_2(f^{k-1}(a))=a$, $f_2(f^i(p))=f^{i+1}(p)$, $i=0,\ \cdots,\ k-1$;

2) $f_2 | M^n - \bigcup_{i=0}^{k-1} V(f^i(p), \varepsilon_i) = f | M^n - \bigcup_{i=0}^{k-1} V(f^i(p), \varepsilon_i)$.

易见 $f_2 \in N(f, \varepsilon)$. 记

$$g = f_2 f_1.$$

不难看出，有 $g \in N(f, \varepsilon)$. 由上述构造可以看出，

$$g^k(\widehat{pa}) \subset \widehat{pa}$$

且

$$g^k |_{\widehat{pa}}: \widehat{pa} \to \widehat{pa}$$

有 N 型拟马蹄结构. 据命题 9，我们有

$$\mathrm{ent}(g) = \frac{1}{k}\mathrm{ent}(g^k) \geqslant \frac{1}{k}\mathrm{ent}(g^k|_{\widehat{pa}}) \geqslant \frac{1}{k}\log N > 0.$$

据§7.2 的命题 3，g 在 $\Omega(g)$ 上混沌. 这就完成了命题 12 的证明.

命题 13 设 $f \in C^0(M^n)$，则当 $\mathrm{ent}(f) < +\infty$ 时，ent 在 f 处不连续.

这个结果显然是命题 8 和命题 9 的直接推论.

命题 14 集合

$$\{f \in C^0(M^n) \mid \mathrm{ent}\ 在\ f\ 处连续\}$$

和

$$\{f \in C^0(M^n) \mid \mathrm{ent}(f) = \infty\}$$

都是 $C^0(M^n)$ 中的贝尔(R. L. Baire)剩余集. 即它们都包含一个可数个处处稠密开集的交集.

证明 据命题 13，易见

$$\{f \in C^0(M^n) \mid \mathrm{ent}(f) = +\infty\} \supset \{f \in C^0(M^n) \mid \mathrm{ent}\ 在\ f\ 处连续\} \supset \bigcap_{N=1}^{\infty} C_N^0(M^n).$$

据命题 8，每一个 $C_N^0(M^n)$ 都在 $C^0(M^n)$ 中开，且处处稠密. □

作为本节结束，我们介绍动力系统理论中的一个重要概念，即"通有性".

定义在一个拓扑空间上的性质 P，如果使这个性质 P 成立的点的集合是这个拓扑空间的一个贝尔剩余集，则我们把性质 P 说

成是通有的.

命题 14 即是说，在 $C^0(M^n)$ 中使 ent 取无穷大和使 ent 在该处连续的性质都是通有的. 可以证明，$C^0(M^n)$ 中一个贝尔剩余集的补集也可以是到处稠密的，但不可能也是贝尔剩余集. 通有性或贝尔剩余集是一个比处处稠密性更占优势的概念.

动力系统中一个著名的问题是拓扑熵猜测，解释于下.

给定 $f\in C^0(M^n)$，f 作为自映射

$$f:\qquad M^n\to M^n,$$

诱导了 M^n 的下同调群的一个同态:

$$f_*:\qquad H_*(M^n, Z)\to H_*(M^n, Z),$$

其中

$$H_*(M^n, Z)=\oplus\sum_{i=0}^{n} H_i(M^n, Z),$$

$H_i(M^n, Z)$ 是 M^n 的 i 维整系数下调群，$i=0, \cdots, n$(可设 $n\geqslant 4$). f_* 是一个线性算子($(n\times 1)\times(n+1)$ 阶整数方阵). 记它的特征值最大模为 ρ. 所谓拓扑熵猜测，是指

$$\mathrm{ent}(f)\geqslant\log\rho.$$

命题 14 的一个简单推论是

命题 15 在 $C^0(M^n)$ 中使拓扑熵猜测成立的 f 的集合，包含一个处处稠密开集.

关于符号动力系统在动力系统理论中的应用，我们就讨论到这里. 符号动力系统的另一项重要应用——构造反例，留待第 6 章中去讨论.

第 4 章

有限型子转移与非负方阵

有限型子转移是符号动力系统中被研究得比较全面彻底，成果也比较丰富的部分，它也是本书的主要内容．有限型子转移可以决定一个 0, 1-方阵．反过来，一个 0, 1-方阵也可以决定一个有限型子转移．而且，在一定的条件下，这种关系是一一的．因此，0, 1-方阵是研究有限型子转移的主要工具．本章介绍非负方阵的概念和基本性质，为用 0, 1-方阵讨论有限型子转移提供基础．有限型子转移的动力性状留待下一章讨论．

§11 非负方阵

§11.1 不可约性与非周期性

设 $k\geqslant 2$，并记实数域上全体 $k\times k$-方阵的集合为 M_k．设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_0^{k-1}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_0^{k-1}\in M_k$．

先引进下述术语和记号．

如果 $a_{ij}\geqslant 0$，$0\leqslant i, j<k$，就说 $\boldsymbol{A}$ 是非负的．

如果 $a_{ij}\geqslant b_{ij}$，$0\leqslant i, j<k$，则记 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}$；

如果 $A\geqslant B$，但 $A\neq B$，则记 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}$；

如果 $a_{ij}>b_{ij}$，$0\leqslant i, j<k$，则记 $\boldsymbol{A}\gg\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^n=(a_{ij}^{(n)})$，$\forall n>0$；

如果 $\boldsymbol{A}\gg\boldsymbol{0}$（$\boldsymbol{0}\in M_k$），称 $\boldsymbol{A}$ 是全正的．

事实上 M_k 是 $k\times k$ 维欧氏空间，可以在其上定义模，但不唯一．例如，可以定义

$$\|\boldsymbol{A}\|=\sum_{i,j=0}^{k-1}|a_{ij}|.$$

我们需要下述命题，它是著名的佩隆(O. Perron)-弗罗贝尼乌斯(F. G. Frobenius)定理的一部分．

命题1 设 $A=(a_{ij})$是 $k\times k$-非负方阵，则

i) A 有一个非负特征值，记作 $\rho(A)$，A 无特征根的模大于 $\rho(A)$. $\rho(A)$称作 A 的谱半径；

ii) 对 M_k 上任意定义的模 $\|A\|$，我们有

$$\rho(A)=\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

证明参见[5]和[3].

设 $A=(a_{ij})$是 $k\times k$ 非负方阵.

定义1 如果对任意固定 $0\leqslant i$, $j<k$, 存在 $n>0$, 使得 $a_{ij}^{(n)}>0$, 则说 A 是不可约的.

如果存在 $n>0$, 使得

$$a_{ij}^{(n)}>0, \qquad \forall 0\leqslant i,\ j<k$$

或等价地，

$$A^n\gg 0,$$

则说 A 是非周期的.

显然，

$$\text{非周期性} \Rightarrow \text{不可约性}.$$

但反之不然.

记 E 为 M_k 的单位方阵. 而对 $0\leqslant i$, $j<k$, 记

$$E_{ij}=\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & \cdots & & 1 &&&& \\
&&&& 1 &&&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&&& \\
&&&&&& 1 &&&&& \\
&&& 1 &&&& 0 &&&& \\
&&&&&&&& 1 &&& \\
&&&&&&&&& \ddots && \\
&&&&&&&&&& 1 &
\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\text{第}j\text{列}$$

其中空白之处均为0. E_{ij} 是把 E 的第 i 行与第 j 行对调或者把第 i 列与第 j 列对调的结果. 易见

$$E_{ij}E_{ij}=E,$$

即每一个这样的方阵都是它自己的逆方阵.

又, $A\in M_k$, 则 $E_{ij}AE_{ij}$ 是一类特殊的相似变换, 把 A 的第 i 行与第 j 行对调, 再把第 i 列与第 j 列对调的结果.

定义 2 设 $T\in M_k$. 如果 T 是有限个形如 E_{ij} 的方阵的乘积, 则称 T 是初等方阵. 用初等方阵作相似变换, 叫作初等变换.

非负方阵的不可约性与非周期性在符号动力系统中具有重要应用. 下述命题是重要的.

命题 2 设 $A=(a_{ij})\in M_k$ 是非负的. 则下述条件等价.

i) A 不可约;

ii) A 在初等变换下不能变成

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

形状, 其中 B 和 D 是方阵;

iii) $E+A$ 是非周期的.

证明 i $\Rightarrow$ ii 用反证法. 设 T 是初等方阵, 使得

$$TAT^{-1}=\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

因为初等变换只是有限次地把 A 的不同行对调和相应列对调, 因此, 存在 $0\leqslant l, m<k$, 使 $a_{lm}=0$ 是

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

中方阵 0 的元素. 对任意 $n>0$, 显然 $a_{lm}^{(n)}$ 是

$$TA^nT^{-1}=\begin{pmatrix} B^n & 0 \\ C' & D^n \end{pmatrix}$$

中方阵 0 的元素, 因此 $a_{lm}^{(n)}=0$. 这说明 A 不是不可约的, 矛盾. i $\Rightarrow$ ii 获证.

ii ⇒ iii 我们证明

$$(E+A)^{k-1}\gg 0.$$

设
$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_0\\ \vdots \\ y_{k-1}\end{pmatrix}\neq \mathbf{0}$$

是非负向量. 记

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} y_0\\ \vdots \\ y_{k-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_0\\ \vdots \\ z_{k-1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{z}.$$

因为 $\boldsymbol{A}\geqslant\mathbf{0}$, 易见

$$y_i\neq 0 \Rightarrow z_i\neq 0. \qquad \forall 0\leqslant i<k$$

下面在 ii 的假设条件下证明, 对任意非负实向量 $\boldsymbol{y}$, 下述两种情况之一成立:

a) $\boldsymbol{z}$ 为严格正向量,

b) $\boldsymbol{z}$ 中坐标为 0 的分量个数严格少于 $\boldsymbol{y}$ 中坐标为 0 的个数.

设上述断言不成立. 即存在 $\boldsymbol{y}\neq\mathbf{0}$, 使得$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$ 中坐标分量为 0 的个数与 $\boldsymbol{y}$ 中坐标分量为 0 的个数相等. 易见, 存在初等方阵 $\boldsymbol{T}$, 使方程组

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$$

与
$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{TAT}^{-1})\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{u}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}$$

等价, 其中 $\boldsymbol{u}>\mathbf{0}$, $\boldsymbol{v}>\mathbf{0}$ 为严格正向量, 且维数相同. 记

$$\boldsymbol{TAT}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{00} & \boldsymbol{A}_{01}\\ \boldsymbol{A}_{10} & \boldsymbol{A}_{11}\end{pmatrix}.$$

于是有

$$\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{u}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{00} & \boldsymbol{A}_{01}\\ \boldsymbol{A}_{10} & \boldsymbol{A}_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{u}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{cases}\mathbf{0}+\boldsymbol{A}_{01}\boldsymbol{u}=\mathbf{0},\\ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}.\end{cases}$$

因为 $u>0$, 故 $A_{01}=0$. 这与 ii 矛盾, 上述断言获证. 显然, 对任意向量 $y\neq 0$,

$$(E+A)^{k-1}y$$

是全正向量, 即

$$(E+A)^{k-1}\gg 0.$$

iii $\Rightarrow$ i 设 $n>0$, 使

$$(E+A)^{n}\gg 0.$$

按牛顿二项式展开, 上式左端乘以 A, 得

$$A^{n+1}+C_n^{n-1}A^n+\cdots+C_n^1A^2+A\gg 0.$$

其中 C_n^i 为牛顿二项式系数, $0\leqslant i<n$. 显然, 对 $0\leqslant i,\ j<k$, 有

$$a_{ij}^{(n+1)}+C_n^{n-1}a_{ij}^{(n)}+\cdots+C_n^1a_{ij}^{(2)}+a_{ij}>0.$$

因此, $a_{ij}^{(n+1)}$, $\cdots$, a_{ij} 中至少有一项不为 0, 即 A 为不可约方阵. □

关于非负方阵的标准型, 我们有

命题 3 设 $A=(a_{ij})\in M_k$ 是非负方阵, 且每一行和每一列元素均不全为 0. 则 A 在初等变换下有如下的下三角形的标准型,

$$\begin{pmatrix} A_{k_1} & & & & & \\ 0 & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k_r} & & \\ A_{k_{r+1}k_1} & \cdots & A_{k_{r+1}k_r} & A_{k_{r+1}} & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ A_{k_sk_1} & & \cdots & & A_{k_sk_{s-1}} & A_{k_s} \end{pmatrix},$$

其中

$k_1+\cdots+k_s=k$, $k_i>0$, A_{k_i} 为不可约非负方阵, $i=1, \cdots, s$;

$A_{k_lk_1}$, $\cdots$, $A_{k_lk_{l-1}}$ 中至少有一个不是 $\mathbf{0}$ 矩阵, $l=r+1, \cdots, s$.

证明 如果 A 不可约, 则 $A=A_{k_1}$, $k_1=k$. 下设 A 可约. 据命题 2, A 可在初等变换下变成如下形状

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 均不可约，证明完成；若 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 中仍有可约方阵，例如 $\boldsymbol{B}$ 可约，则上面的方阵在初等变换下又可变成

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K} & \mathbf{0} & \\ \boldsymbol{H} & \boldsymbol{L} & \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}.$$

这个过程可以一直持续下去，直到 $\boldsymbol{A}$ 在初等变换下变成如下的下三角阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k_1} & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & \boldsymbol{A}_{k_r} & & & \\ & & & \boldsymbol{A}_{k_{r+1}} & & \\ & * & & & \ddots & \\ & & & & & \boldsymbol{A}_{k_s} \end{pmatrix}$$

为止，其中 $\boldsymbol{A}_{k_i}$ 为相应阶非负不可约方阵($i=1, 2, \cdots, s$)。命题的其余部分显然可在初等变换下完成. □

下面设 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均为 $k\times k$-非负方阵. 我们还有下述简单命题.

命题 4 i) $\boldsymbol{B}$ 不可约(非周期) $\Rightarrow \boldsymbol{B}^T$ 亦然，其中 $\boldsymbol{B}^T$ 表示 $\boldsymbol{B}$ 的转置；

ii) $\boldsymbol{B}$ 不可约(非周期)$\Rightarrow \boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ 亦然.

从定义出发即可直接验证，这里从略。

§11.2 非负方阵的有向图

在非负方阵的传统理论中，每一个 $k\times k$-非负方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 都对应一个有向图，它的顶点的个数与非负方阵的阶数相同，即为 k，记为

$$P_0, P_1, \cdots, P_{k-1},$$

而从 P_i 到 P_j 有一个有向弧，如果 $a_{ij}\neq 0$, $i, j=0, \cdots, k-1$。

[例 1] 设

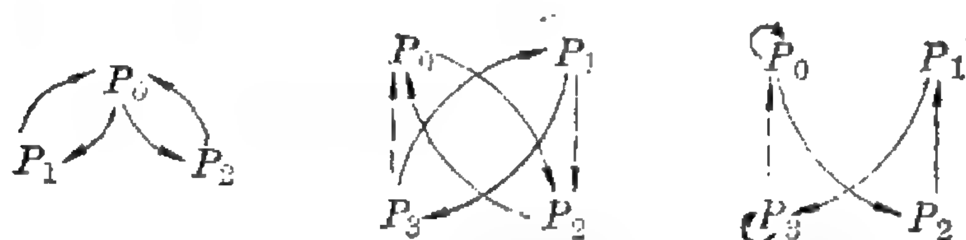
四

甲

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},$$

则对应 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的有向图依次为



利用非负方阵的有向图，很容易给出不可约的判断：非负方阵不可约，当且仅当在相联系的有向图中任意两个顶点之间有有向路径相联接（这个性质叫作"有向图的强连通性"）.

例如，在上面的例子中，易于看出 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是不可约的，但 $\boldsymbol{B}$ 不是．在 $\boldsymbol{B}$ 所联系的有向图中，没有从顶点 P_0 通向 P_1 的有向路径.

但是，这样定义的有向图，用来判别非周期性就不很简单．作者在[36]中曾对非负方阵引进了一个新的有向图，它的顶点不是固定的，而且它可以在非负方阵上直接实现.

定义 3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_k$ 是非负方阵．在 $\boldsymbol{A}$ 上定义一个有向图 $G(\boldsymbol{A})$ 如下：

a_{ij} 是 $G(\boldsymbol{A})$ 的一个顶点，当且仅当 $a_{ij}>0$；

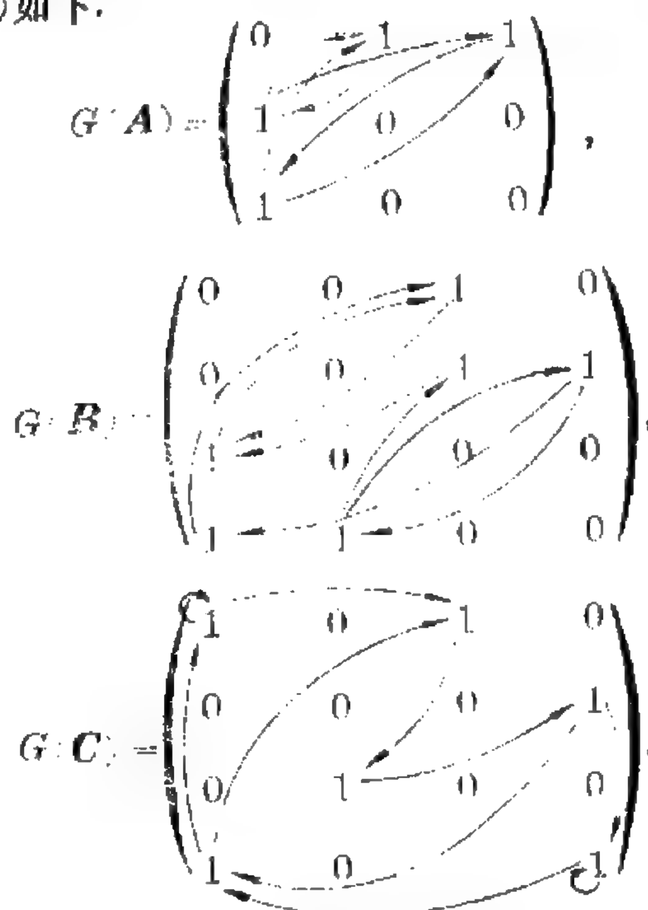
从顶点 a_{ij} 到顶点 a_{lm} 有一条有向弧，记作 $a_{ij}\to a_{lm}$，

当且仅当 $j=l$.

即在 $\boldsymbol{A}$ 中，正元素构成了 $G(\boldsymbol{A})$ 的全部顶点，且从一个顶点到另一个顶点有一条有向弧当且仅当前者的列指标等于后者的行指

标.

[例2] 在例1中，由 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 所决定的有向图 $G(\boldsymbol{A})$、$G(\boldsymbol{B})$ 和 $G(\boldsymbol{C})$ 如下.



非负方阵的有向图将是我们讨论有限型子转移的主要工具，因此下面我们要对非负方阵的有向图作较为详细的讨论. 先引进一些名词和简单事实. 下设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_k$ 为非负方阵.

a) 有向路径

$$P=a_{i_0i_1}\to a_{i_1i_2}\to\cdots\to a_{i_rl}\qquad(r>0)$$

中，顶点的个数叫作它的长度，记作 $|P|$.

当 $l=i_0$ 时，P 叫作闭路，其长度称作它的周期.

b) 有重复顶点的闭路叫作可约闭路. 不是可约闭路的闭路叫作不可约闭路.

c) 设

$$Q=a_{j_0j_1}\to a_{j_1j_2}\to\cdots\to a_{j_sm}\qquad(s>0)$$

是另一条有向路径．当 $l=j_0$ 时，记

$$PQ=a_{i_0i_1}\to\cdots\to a_{i_{r-1}l}\to a_{j_0j_1}\to\cdots\to a_{j_sm}$$

叫作 P 与 Q 的合成有向路径．显然，$|PQ|=|P|+|Q|$．

d）当 P 是闭路时，

$$\overbrace{PP\cdots P}^{i}\qquad(i>0)$$

亦是闭路，周期为 $i|P|$．

特别地，有公共顶点的两个不同闭路可以在公共顶点处连接起来，得到一个新的闭路，其周期为两者周期之和．这样得到的闭路叫作闭路的合成．

显然，任何闭路都是不可约闭路的合成．

如前所述，非负方阵的不可约性很容易利用传统的有向图给出判断，但判断非周期性就远非那么简单．利用我们上面引进的新的有向图，不但判别不可约性依然那么简单，而且判别非周期性也是简单可行的．但是，这里我们不专门讨论这个问题，而是留待讨论有限型子转移时一并进行．读者将会看到，非负方阵的有向图结构与有限型子转移的动力性状之间的关系十分密切．

§12　有限型子转移的转移方阵

§12.1　转移方阵

在我们的非负方阵理论基础已有了很好的准备之后，本节和下一章就用非负方阵这个工具来讨论有限型子转移的动力性状．

设 $k\geqslant 2$ 和 $(S^{\mathbb{Z}+},\sigma)$ 同前．此后，我们说不变闭子集 $\Lambda\in L(S^{\mathbb{Z}+})$ 或子转移

$$\sigma_{\Lambda}:\ \Lambda\to\Lambda$$

是有限型的，总是指它有一个 2 阶排除系统 $\mathscr{A}$，或等价地，它有一个 2 阶决定系统（§9 命题 4）．此后，我们只讨论 2 阶有限型子转移．据 §9 命题 5，我们作这种限制本质上是不失普遍意义

的．2阶有限型子转移有时亦称为**拓扑马尔可夫链**．

定义1 如果

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当}(i\ j)\prec\Lambda\text{时;}\\ 0, & \text{其余情况,}\end{cases}$$

则 $k\times k$ 阶 0, 1–方阵

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})^{k-1}$$

叫作 Λ 或子转移

$$\sigma_{\Lambda}:\ \Lambda\to\Lambda$$

的**转移方阵**．这里，$(i\ j)$是 S 上的 2–序列．

显然，对给定的 $\Lambda\in L(S^{\mathbf{Z}+})$，方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是完全确定的．反过来，我们要问，一个 $k\times k$ 阶 0, 1–方阵是否可以决定一个有限型子转移？下述命题回答了这个问题．

命题1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_k$ 是 0, 1–方阵，则

$$\Lambda_{\boldsymbol{A}}=\{x\in S^{\mathbf{Z}+}\mid a_{x_ix_{i+1}}=1,\ \forall i\geqslant 0\}$$

是对 σ 不变的有限型闭子集(有可能是空集)．

证明 $\Lambda_{\boldsymbol{A}}$ 闭，且对 σ 不变，可由定义直接加以验证．令

$$\mathscr{A}=\{(i\ j)\mid a_{ij}=0,\ \forall 0\leqslant i,\ j<k\}.$$

容易直接验证，$\mathscr{A}$ 是 $\Lambda_{\boldsymbol{A}}$ 的一个排除系统．因此，$\Lambda_{\boldsymbol{A}}$ 是有限型的．证毕．

[例1] 设

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

则 $\Lambda_{\boldsymbol{A}_1}=\varnothing$, $\Lambda_{\boldsymbol{A}_2}=\varnothing$.

[例2] 设

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$\Lambda_{\boldsymbol{A}_1}=\{(011\cdots),\ (11\cdots)\},\qquad \Lambda_{\boldsymbol{A}_2}=\{(11\cdots)\}.$$

但在双边情形，则有

$$\Lambda_{A_1}=\Lambda_{A_2}=\{(\cdots 1\overset{*}{1}1\cdots)\}.$$

由上述例子可以看出，0, 1-方阵与有限型子转移不是一一对应的. 以后将会看到，对0,1-方阵加上适当但又不失普遍性的条件之后，这个情况会自动消失. 此后，我们讨论有限型子转移时，总是假设它是由一个0,1-方阵按命题1方式决定的. 很显然，有限型子转移的动力性状完全由给出它的0,1-方阵的结构所决定，即由它的元素中为1的个数和分布所决定. 下面我们讨论有限型子转移在很大程度上是通过讨论决定它的0,1-方阵和与之相联系的有向图来实现的. 为此，我们要继续深入讨论非负方阵(0,1-方阵是特殊的非负方阵)的一些基本概念，引进一些术语和命题，所涉及的内容以满足本书后面的需要为限.

§12.2 转移方阵的限制

设$k\geqslant 2$和(S^{Z+}, σ)同前.

我们已经证明，每一个有限型子转移可以决定一个0,1-方阵，即它的转移方阵；而且，反过来，每一个0,1-方阵也可以决定一个有限型子转移. 但是，这种相互决定不是一一的，即一个非零0,1-方阵可能决定一个空集，不同0,1-方阵也可能决定同一个有限型子转移. 再者，在§11中我们证明，每一个非负方阵在初等变换下可以取成下三角阵的标准型. 本节我们将对0,1-方阵加上某些限制条件，使得有限型子转移与0,1-方阵一一对应，并说明理由，此后我们总可以假设0,1-方阵已取成标准型而不失普遍性. 为了这个目的，也为了以后讨论有限型子转移的动力性状更方便，我们先引进一些术语和记号.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是$k\times k$ 0,1-方阵，Λ_A和

$$\sigma_A:\ \Lambda_A\to\Lambda_A$$

的定义同前节.

定义2 $S=\{0, 1, \cdots, k-1\}$上n序列

$$(i_0\ i_1\ \cdots\ i_{n-1})$$

叫作可允许的(相对 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 或 Λ_A 而言),如果

$$ {}_m[i_0\ i_1\ \cdots\ i_{n-1}]_A=\{x\in\Lambda_A\,|\,x_{m+i_0}=i_0,\ \cdots,\ x_{m+n-1}=i_{n-1}\} $$
$$ ={}_m[i_0\cdots i_{n-1}]\cap\Lambda_A\neq\varnothing, $$

其中

$$ {}_m[i_0\ i_1\ \cdots\ i_{n-1}] \qquad (m\geqslant 0) $$

是 $(i_0\ \cdots\ i_{n-1})$ 上的柱形(见 §8),而

$$ {}_m[i_0\ i_1\ \cdots\ i_{n-1}]_A $$

叫作 Λ_A 上的**相对柱形**,它是 Λ_A 的既开又闭的集合,且所有相对柱形,即

$$ \{{}_m[i_0\ i_1\ \cdots\ i_{n-1}]_A\,|\,i_l\in S,\ l=0,\ \cdots,\ n-1,\ \ \forall n>0,\forall m\geqslant 0\} $$

是 Λ_A 的相对拓扑的一组基.

特别地,当

$$ {}_m[i_0,\ i_1]_A\neq\varnothing $$

时,称 i_0 为 i_1 的**可允许前缀**,i_1 叫作 i_0 的**可允许后续**.

下面是一些术语和简单事实.

a) 易见,i_0 是 i_1 的可允许前缀或 i_1 是 i_0 的可允许后续的必要条件是 $a_{i_0i_1}=1$,即 $a_{i_0i_1}$ 是 $G(A)$ 的一个顶点. 这个条件不充分,例如,当

$$ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} $$

时,$a_{01}=1$,但在双边情形下

$$ {}_0[0,\ 1]_A=\varnothing. $$

在对 $\boldsymbol{A}$ 附加适当条件后,这个情况会消失.

b) 设 $P_1=(i_0\ \cdots\ i_{n-1})$、$P_2=(j_0\ \cdots\ j_{m-1})$ 是两个可允许序列 $(m>0,\ n>0)$. 若 j_0 是 i_{n-1} 的可允许后续,则易见

$$ P_1P_2=(i_0\ \cdots\ i_{n-1}\ j_0\ \cdots\ j_{m-1}) $$

是可允许 $n+m$-序列,叫作 P_1 和 P_2 的**合成**.

当 i_0 是 i_{n-1} 的可允许后续时,易见

$$ P_1P_1\cdots P_1\cdots=(i_0\ i_1\ \cdots\ i_{n-1}\ i_0\ i_1\ \cdots\ i_{n-1}\ \cdots)\in\Lambda_A $$

是 σ_A 的一个周期点,其周期 $\leqslant n$. 这时 P_1 称作**可允许循环节**.当

上述由 P_1 决定的周期点的周期为 n 时，即等于 P_1 的长度，P_1 称作可允许周期节.

c）符号两两不同的可允许循环节一定是可允许周期节，称作不可约的可允许周期节. 由不可约可允许周期节生成的周期点的周期称作 σ_A 的不可约周期.

显然，不可约周期 $\leqslant k$. 因此，不可约周期的基数有限.

d）同一个不可约周期可能对应不同不可约可允许周期节或 σ_A 的周期点.

e）有公共符号的可允许循环节可在公共符号处连接在一起，而构成合成的可允许循环节. 显然，可允许循环节和可允许周期节均可由可允许不可约周期节合成而得到.

f）非周期的可允许循环节一定是由一个可允许周期节合成而得到，但不一定是由一个可允许不可约周期节生成.

g）设

$$P = a_{i_0 i_1} \to a_{i_1 i_2} \to \cdots \to a_{i_{n-1} i_n}$$

是 $G(\boldsymbol{A})$ 的一个长度为 n 的有向路径. 它对应一个 $n+1$-序列 $(i_0\ i_1\ \cdots\ i_n)$.

注意，这样对应的序列不一定是可允许的. 例如，取

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $a_{01} \to a_{11}$ 是 $G(\boldsymbol{A})$ 的有向路径，但在双边情形下，对应的 3-序列 $(0\ 1\ 1)$ 不是可允许的，因为 0 不是可允许后续，因而

$$_m[0\ 1\ 1]_A = \varnothing. \qquad \forall\, m \in \mathbb{Z}$$

当 $i_0 = i_n$ 时，P 对应一个循环节

$$(i_0\ \cdots\ i_{n-1}).$$

易于证明，这样的循环节总是可允许的. 事实上，

$$PP\cdots = (i_0\ \cdots\ i_{n-1}\ i_0\ \cdots\ i_{n-1}\ \cdots) \in \Lambda_{\boldsymbol{A}},$$

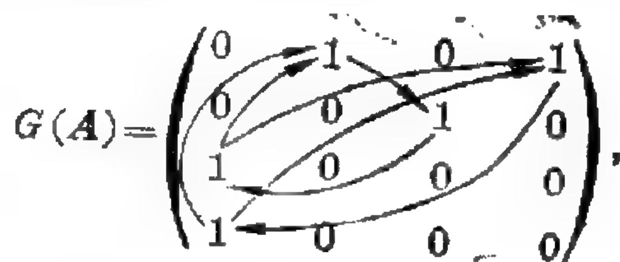
即

$$_0[i_0\ \cdots\ i_{n-1}]_A \neq \varnothing.$$

这个循环节有时亦用 P 表示.

特别地，$G(\boldsymbol{A})$ 的闭路对应长度相同的可允许循环节. 反过来，一个可允许循环节对应 $G(\boldsymbol{A})$的一条闭路.

h) 不可约闭路一定对应可允许周期节. 这是因为，可允许非周期循环节对应 $G(\boldsymbol{A})$ 的闭路一定有重复的顶点，即不是不可约的. 但是，不可约闭路对应的周期节却不一定是不可约的. 例如，取



易见

$$a_{01}\to a_{12}\to a_{20}\to a_{03}\to a_{30}$$

是 $G(\boldsymbol{A})$的一条不可约闭路，但对应的可允许周期节

$$(0\ 1\ 2\ 0\ 3)$$

却不是不可约的，而是由两个可允许不可约周期节

$$(0\ 1\ 2),\quad (0\ 3)$$

合成而得到.

命题 2 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$中第 i 行元素全部为 0，$0<i<k$，则 $\Lambda_{\boldsymbol{A}}$ 中的点的坐标分量中不出现符号 i.

证明 据假设 $a_{ij}=0$，$j=0$，$\cdots$，$k-1$. 显然，i 没有可允许后续，因此，i 不可能出现在 $\Lambda_{\boldsymbol{A}}$ 的点的坐标分量中. □

命题 3 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$中第 j 列元素全部为 0，$0<j<k$，则符号 j 只能作为最前面一个坐标分量出现在 $\Lambda_{\boldsymbol{A}}$ 的点中（在双边情形下则不能出现），且当这样的点存在时，$\sigma_{\boldsymbol{A}}$ 不是在上的.

证明 据假设 $a_{ij}=0$，$i=0$，$\cdots$，$k-1$. 显然，j 没有可允许前缀，因此，它如出现在 $\Lambda_{\boldsymbol{A}}$ 的点的坐标中，只能作为第一个坐标分量.

据转移自映射的定义，当 j 出现在 $\Lambda_{\boldsymbol{A}}$ 的点内时，$\sigma_{\boldsymbol{A}}$ 不是在

上的，因为没有 Λ_A 中的点以这样的点为象点。

在双边情形下，因为点无最前面的坐标，故这样的 j 不可能出现在 Λ_A 的点中。 □

据命题 2，在非负方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中，若有一行元素全部为 0，则它决定的有限型子转移可归结为较低阶符号动力系统去讨论。

在命题 3 的假设条件下，把 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的第 j 行元素全部换成 0 而其余元素不变，得到一个同阶 0，1-方阵 $\boldsymbol{A}_1$. 容易看出，Λ_{A_1} 即是在 Λ_A 中把以 j 为最前面坐标分量的点去掉后得到的集合. 下面将会看到，σ_A 和 σ_{A_1} 有相同的非游荡集，因而有相同的动力性状.

下面我们分析一下，当 0，1-方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 作初等变换时，对它所决定的有限型子转移有什么影响.

我们在定义 k 阶符号空间时，k 个符号是取作

$$S=\{0,\ 1,\ \cdots,\ k-1\}.$$

这样取 k 个符号的同时，也规定了它们之间的一个顺序（按自然数大小的顺序）. 当用 0，1-方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 定义 Λ_A 时，事实上只不过是规定了这 k 个符号之间可以作为可允许前缀和可允许后续的关系而已. 当这 k 个符号的排列顺序改变时（即经过一个置换变换），为了保持符号之间的这种关系不变，0，1-方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 也必须作相应的改变，而这种改变恰恰就是初等变换. 这很容易从两个符号对换这种简单情形看出来，而一般的置换又不过是对换的乘积而已. 例如，当符号 i 与 j 对换时（$0\leqslant i<j<k$），为保持符号间可以作为可允许前缀和可允许后续的关系不变，必须也只须把 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的第 i 行与第 j 行对调，再把第 i 列与第 j 列对调即可，即作相应的初等变换. 因此，我们有

命题 4 在初等变换下，0，1-方阵所决定的有限型子转移不变.

在作了上述讨论之后，我们此后总是可以假设 0，1-方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的每一行和每一列的元素均不全为 0，而且在必要的时候可

以假设 $\boldsymbol{A}$ 已经取成如 § 11 中所述那种下三角阵的标准型。这些假设将一直坚持而不再另行声明。

下面假设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是两个 $k\times k$ 阶 0, 1-方阵。

命题 5 $G(\boldsymbol{A})$ 的每一有向路径所决定的有限序列总是可允许的。

证明 由 $\boldsymbol{A}$ 的每一行和每一列的元素均不全为 0 的假设，容易从有向图的定义看出，$G(\boldsymbol{A})$ 的从任一顶点出发的有向路径可以无限延伸。这事实上就保证了由有向路径决定的有限序列总是可允许的。 □

推论 对任意 $0\leqslant i,\ j<k$,

$$a_{ij}=1 \Leftrightarrow {}_0[i\ \ j]_A\neq\varnothing.$$

证明 只须把 a_{ij} 看作是长度为 1 的有向路径即可。 □

命题 6 $P(\sigma_A)\neq\varnothing$.

证明 据命题 5 的证明，$G(\boldsymbol{A})$ 有任意长的有向路径，因而它必有闭路。闭路决定的有限序列作为可允许循环节生成 σ_A 的周期点，因此

$$P(\sigma_A)\neq\varnothing.$$ □

命题 7 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\Lambda_A\neq\Lambda_B$.

证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 显然蕴涵 $\Lambda_A=\Lambda_B$. 这就证明了 $\Leftarrow$ 部分.

下面证明 $\Rightarrow$ 部分. 设 $a_{ij}=0$ 但 $b_{ij}=1$, $0\leqslant i,\ j<k$. 据定义，$(i\ j)$ 在 Λ_A 中不能出现，但据命题 5 的推论，它在 Λ_B 中出现。因此

$$\Lambda_A\neq\Lambda_B.$$ □

推论 $k\times k$ 阶 0, 1-方阵与

$$\sigma:\qquad S^{\mathbb{Z}+}\to S^{\mathbb{Z}+}$$

的有限型子转移一一对应.

结论是显然的，证明从略.

命题 8 σ_A 在上，且

$$S=\{0,\ 1,\ \cdots,\ k-1\}$$

每个符号均在 Λ_A 中点的坐标中出现，即 σ_A 是真的 k 阶子转移。

证明 设 $x=(x_0\ x_1\ \cdots)\in\Lambda_A$。据假设，存在 i，$0\leqslant i<k$，使得

$$a_{ix_0}=1.$$

显然，

$$(i_0\ x_0\ x_1\ \cdots)\in\Lambda_A$$

和

$$\sigma((i\ x_0\ x_1\ \cdots))=x.$$

又，对任意 i，$0\leqslant i<k$，存在 j，$0\leqslant j<k$，使

$$a_{ij}=1.$$

据命题5的推论，$(i\ j)$ 是可允许2-序列，即符号 i 在 Λ_A 中点的坐标中出现。证毕。

第 5 章

有限型子转移的动力性状

本章的目的是用 0,1–方阵这个工具围绕非游荡集结构、拓扑熵估计与计算和混沌存在条件这三个基本问题以及它们之间的关系，对有限型子转移进行全面系统的讨论. 就这个范围而言，我们对有限型子转移的了解可以说大体上是清楚了.

§13 有限型子转移的非游荡集与传递性

§13.1 有限型子转移的非游荡集

有限型子转移与全转移的一个重要不同，是它可以有游荡点. 这引起一个重要问题，即有限型子转移的非游荡集结构问题. 我们从非游荡点的判断讨论起.

设 $k\geqslant 2$ 和 $(S^{\mathbf{Z}_+}, \sigma)$ 同前. 又设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $k\times k$ 阶 0, 1–方阵，$\Lambda_{\boldsymbol{A}}$ 为由 $\boldsymbol{A}$ 决定的有限型子转移.

命题 1 设 $x\in\Lambda_{\boldsymbol{A}}$. 则下述条件等价:

i) $x\in\Omega(\sigma_{\boldsymbol{A}})$;

ii) 对任意的 $N>0$，存在 $y\in\Lambda_{\boldsymbol{A}}$，使 $y_0=x_N$，并对某个 $j>0$，$y_j=x_0$;

iii) 对任意 $i>0$，存在从 $a_{x_ix_{i+1}}$ 到 $a_{x_0x_1}$ 的有向路径.

证明 i⇒ii 设 $x\in\Omega(\sigma_{\boldsymbol{A}})$ 和 $N>0$. 据非游荡点的定义，存在 $n>N$，使

$$\sigma_{\boldsymbol{A}}^n({}_0[x_0\,x_1\,\cdots\,x_N]_{\boldsymbol{A}})\cap{}_0[x_0\,x_1\,\cdots\,x_N]_{\boldsymbol{A}}\neq\varnothing.$$

即存在 $z\in{}_0[x_0\,x_1\,\cdots\,x_N]_{\boldsymbol{A}}$，使得

$$\sigma_{\boldsymbol{A}}^n(z)\in{}_0[x_0\,x_1\,\cdots\,x_N]_{\boldsymbol{A}}.$$

由此易见，

$$z_n=x_0, \qquad z_i=x_i, \qquad i=0, \cdots, N$$

记 $y=\sigma_A^N(z)\in\Lambda_A$。易见

$$y_0=z_N=x_N, \qquad y_j=x_0, \qquad j=n-N>0$$

ii $\Rightarrow$ iii　设 $i>0$。据 ii，存在 $y\in\Lambda_A$，使

$$x_n=y_0, \qquad x_0=y_j, \qquad j>0, \ n>i$$

显然，$(x_i x_{i+1} \cdots x_n \ y_1 \cdots y_{j-1} \ x_0 \ x_1)$ 是可允许序列。因此

$$a_{x_i x_{i+1}} \to \cdots \to a_{j-1 x_0} \to a_{x_0 x_1}$$

是 $G(A)$ 的有向路径。

iii $\Rightarrow$ i　设 $N>0$ 和柱形 ${}_0[x_0 \cdots x_N]_A$。取 $i\geqslant N$。据假设，存在有向路径

$$a_{x_i x_{i+1}} \to \cdots \to a_{x_{i+r} x_{i+r+1}} \to a_{x_0 x_1},$$

$$(x_{i+r+1}=x_0, \ r>0)$$

定义 $y\in S^{Z_+}$，使得

$$y_m=\begin{cases} x_m, & \text{当 } 0\leqslant m\leqslant i+r \text{ 时；} \\ x_{m-(i+r+1)}, & \text{当 } m\geqslant i+r \text{ 时。} \end{cases}$$

据 § 12 的命题 5，易见 $y\in\Lambda_A$，且

$$y\in {}_0[x_0 \cdots x_N]_A, \qquad \sigma^{i+r+1}(y)\in {}_0[x_0 \cdots x_N]_A.$$

这证明 $\sigma_A^{i+r+1}({}_0[x_0 \cdots x_N]_A)\cap {}_0[x_0 \cdots x_N]_A\neq\varnothing$，即

$$x\in\Omega(\sigma_A).$$

□

有限型子转移的不变闭子集或子系统当然不一定仍然是有限型的(注意，转移自映射本身是有限型的)。这又引起另一个重要问题：即"有限型子转移的非游荡集仍是有限型的?"在回答这个问题之前，我们先证明

命题 2　设 $0\leqslant i, j<k$ 和 $n>0$，则

$$a_{ij}^{(n)}=\#(\{(i_0 \cdots i_n) \mid (i_0 \cdots i_n)\text{是可允许的}, i_0=i, \ i_n=j\})$$
$$=\#(\{a_{i_0 i_1}\to\cdots\to a_{i_{n-1} i_n} \mid i_0=i, \ i_n=j\}),$$

即 $a_{ij}^{(n)}$ 是连接 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行上 $G(\boldsymbol{A})$ 的顶点到 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列上 $G(\boldsymbol{A})$

的顶点的长度为 n 的全部有向路径的基数.

证明 当 $n=1$ 时,结论是明显的. 设对 $n-1$ 时结论已成立. 由矩阵乘法,我们有

$$a_{ij}^{(n)'}=(a_{i i_0}^{(n-1)'}\ a_{i i_1}^{(n-1)'}\ \cdots\ a_{i i_{k-1}}^{(n-1)'})\begin{pmatrix}a_{0j}\\ a_{1j}\\ \vdots\\ a_{k-1,j}\end{pmatrix}=\sum_{l=0}^{k-1}a_{il}^{(n-1)'}a_{lj}.$$

据归纳法假设, $a_{il}^{(n-1)'}$ 是可允许 n-序列集合 $\{(i\cdots l)\}$ 的基数. 因此, $a_{ij}^{(n)'}$ 是可允许 $n+1$-序列集合 $\{(i\cdots j)\}$ 的基数. 证毕.

命题 3 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$不可约, 当且仅当 $G(\boldsymbol{A})$有一条闭路过所有顶点.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$不可约. 设 a_{ij} 和 a_{lm} 是 $G(\boldsymbol{A})$的任意两个顶点($0\leqslant i, j, l, m<k$). 显然, 为证明必要性, 只须证明存在从 a_{ij} 到 a_{lm} 的有向路径即可. 据不可约性的定义, 存在 $n>0$, 使

$$a_{jl}^{(n)}>0.$$

据命题 2, 存在可允许 $n+1$-序列

$$(j\cdots l).$$

显然 $(i\ j\cdots l\ m)$ 是可允许 $n+3$-序列. 因此

$$a_{ij}\longrightarrow\cdots\cdots\longrightarrow a_{lm}$$

是 $G(\boldsymbol{A})$的从顶点 a_{ij} 到顶点 a_{lm} 的有向路径.

下面证明充分性部分. 设 $0\leqslant i, j<k$. 由关于 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的假设, 存在 $0\leqslant l, m<k$, 使 a_{il} 和 a_{mj} 是 $G(\boldsymbol{A})$的两个顶点. 据假设,存在从 a_{il} 到 a_{mj} 的有向路径,因此存在可允许序列

$$(i\ l\cdots m\ j).$$

设其长度为 $n>1$. 据命题 2, $a_{ij}^{(n-1)}>0$, 即 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$不可约. 证毕.

下面对由 0, 1-方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 决定的有限型子转移作进一步分析. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$已有标准型,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k_1} & & & & \\ 0 & \ddots & & \boldsymbol{0} & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots\cdots & \boldsymbol{A}_{k_r} & & \\ \boldsymbol{A}_{k_{r+1}k_1} & \cdots & & \boldsymbol{A}_{k_{r+1}} & \\ \vdots & & & & \ddots \\ \boldsymbol{A}_{k_s k_1} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \boldsymbol{A}_{k_s} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{A}_{k_s}$ 是对应阶 0, 1-不可约方阵，$k_1+\cdots+k_s=k$（见§11 的命题 3）。

对应 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，状态空间

$$S=\{0, \cdots, k-1\}$$

被分解成不相交的 s 组子集：

$$\{0, 1, \cdots, k_1-1\},$$
$$\{k_1, k_1+1, \cdots, k_1+k_2-1\},$$
$$\vdots$$
$$\{k_1+\cdots+k_{s-1}, \cdots, k_1+\cdots+k_s-1\}.$$

$k_l\times k_l$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}_{k_l}(0<l\leqslant s)$ 在由符号

$$\{k_1+\cdots+k_{l-1}, \cdots, k_1+\cdots+k_l-1\}$$

构成的 k_l 阶符号空间上决定了一个有限型子转移

$$\sigma_{\boldsymbol{A}_{kl}}: \quad \Lambda_{\boldsymbol{A}_{k_l}}\to\Lambda_{\boldsymbol{A}_{k_l}}.$$

以一种明显的方式，$\sigma_{\boldsymbol{A}_{k_l}}$ 可以看作是 $\sigma_{\boldsymbol{A}}$ 的子转移（即把 $k_l\times k_l$ 阶 0, 1-方阵 $\boldsymbol{A}_{k_l}$ 与 $k\times k$ 阶 0, 1-方阵

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & \boldsymbol{0} & \\ & & 0 & & & \\ & & & \boldsymbol{A}_{k_l} & & \\ & \boldsymbol{0} & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

等同起来，而这个方阵是由把 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的标准型中除 $\boldsymbol{A}_{k_l}$ 外均变成 0 而得到。在这个意义下，$\Lambda_{\boldsymbol{A}_{k_l}}$ 自然成了 $\Lambda_{\boldsymbol{A}}$ 的不变闭子集）。

易见

$$\bigcup_{0<l\leqslant s} \Lambda_{A_{kl}} \subset \Lambda_A.$$

命题 4 符号承上，则

$$\bigcup_{0<l\leqslant s} \Lambda_{A_{kl}} = \Lambda_A$$

当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是对角型的：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k_1} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{A}_{k_s} \end{pmatrix},$$

即在 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的标准型中，$r=s$。

证明 先证必要性．设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$不是对角型的，即存在 $r< l\leqslant s$，使得

$$\boldsymbol{A}_{k_ik_l} \neq 0,$$

其中 $1\leqslant i<l$．在 $\boldsymbol{A}_{k_ik_l}$ 上任取 $G(\boldsymbol{A})$ 的一个顶点，它决定了一个2-相对柱形．明显地，决定这个2-相对柱形的两个符号不在上述状态空间

$$S=\{0,\ 1,\ \cdots,\ k-1\}$$

的不相交分解中的同一组内．因此，这个2-相对柱形与每一个 $\Lambda_{k_l}(0<l\leqslant s)$的交集都是空集．这明显蕴涵

$$\bigcup_{0<l\leqslant s} \Lambda_{A_{kl}} \subsetneqq \Lambda_A,$$

与假设矛盾．必要性获证．

现证充分性．Λ_A 显然等于所有2-相对柱形的并集，但每一个2-相对柱形由 $G(\boldsymbol{A})$的一个顶点决定，而当这个顶点位于 $\boldsymbol{A}_{k_l}(0<l\leqslant s)$内时，它所决定的2-相对柱形明显地包含在 $\Lambda_{A_{kl}}$ 内．这蕴涵

$$\bigcup_{0<l\leqslant s} \Lambda_{A_{kl}} \supset \Lambda_A.$$

充分性获证．本命题证毕．

在有了上述准备之后，现在可以回答前面提出的问题了．

命题 5 有限型子转移 σ_A 的非游荡集 $\Omega(\sigma_A)$是有限型的，且

$$\Omega(\sigma_A)=\bigcup_{0<l\leqslant s}\Lambda_{A_{kl}}.$$

证明 设 $x\in\Lambda_A$. 假设有向图 $G(A)$的顶点 $a_{x_0x_1}$ 不在 A_{k_l} 内 $(0<l\leqslant s)$. 从 $G(A)$的有向弧的定义(§11 的定义 3)和 $A=(a_{ij})$ 的下三角形标准型结构，不难看出，从 $a_{x_0x_1}$ 出发的 $G(A)$的任意有向路径不能再回到 $a_{x_0x_1}$，即在 $G(A)$内无闭路含顶点 $a_{x_0x_1}$. 据命题 1 的 iii 可知，$x\notin\Omega(\sigma_A)$.

再设 $a_{x_0x_1}$ 在某个 A_{k_l} 内$(0<l\leqslant s)$，但对某个 $i>0$，$a_{x_ix_{i+1}}$ 不再在任一个 $A_{k_l}(0<l\leqslant s)$内. 根据上面的证明，我们有

$$\sigma_A^i(x)=(x_i\ x_{i+1}\ \cdots)\notin\Omega(\sigma_A).$$

因为非游荡集 $\Omega(\sigma_A)$是对 σ_A 不变的，这蕴涵

$$x\notin\Omega(\sigma_A).$$

余下的情况是，所有顶点 $a_{x_ix_{i+1}}(i\geqslant0)$总是在 A_{k_l} 内$(0<l\leqslant s)$. 在这种情况下，易由有向弧的定义(§11 的定义 3)看出，若 $a_{x_0x_1}$ 在 A_{k_l} 内，则 $a_{x_ix_{i+1}}$ 总是也在 A_{k_l} 内，$\forall i\geqslant0$. 这明显地蕴涵 $x\in\Lambda_{A_{kl}}$. 因为 A_{k_l} 不可约，据命题 3，易于看出，对任意 $i>0$，存在从 $a_{x_ix_{i+1}}$ 到 $a_{x_0x_1}$ 的有向路径. 据命题 1 的 iii，有

$$x\in\Omega(\sigma_A).$$

上面事实上证明了

$$\Omega(\sigma_A)\supset\bigcup_{0<l\leqslant s}\Lambda_{A_{kl}}.$$

据命题 1，易于得到

$$\Omega(\sigma_A)=\bigcup_{0<l\leqslant s}\Lambda_{A_{kl}}.$$

显然，$\Omega(\sigma_A)$即是由 0, 1-方阵

$$\begin{pmatrix} A_{k_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_{k_s} \end{pmatrix}$$

按§12的命题1方式决定的对σ不变的闭子集，因此是有限型的．证毕．

命题5是一个很漂亮的结果，但值得注意的是，有限型子转移的点的ω-极限集不一定仍是有限型的．这将在以后加以讨论．

命题6　$\Omega(\sigma_A)=\Lambda_A$当且仅当$G(\boldsymbol{A})$的每一个顶点都有闭路经过．

证明　设$\Omega(\sigma_A)=\Lambda_A$．据命题4和命题5，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k_1} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{A}_{k_s} \end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{A}_{k_l}$是不可约的$(0<l\leqslant s)$．显然，$G(\boldsymbol{A})$的顶点是某一个$G(\boldsymbol{A}_{k_l})$的顶点，而据命题3，$G(\boldsymbol{A}_{k_l})$的每一个顶点都有$G(\boldsymbol{A}_{k_l})$的因而也是$G(\boldsymbol{A})$的闭路经过．这就证明了必要性．

下面证明充分性．设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k_1} & & & & & \\ 0 & \ddots & & & \boldsymbol{0} & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{A}_{k_r} & & \\ \boldsymbol{A}_{k_{r+1}k_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{A}_{k_{r+1}} & \\ \vdots & & & & & \ddots \\ \boldsymbol{A}_{k_sk_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{A}_{k_s} \end{pmatrix},$$

且存在$r<l\leqslant s$，$0\leqslant i<l$，使

$$\boldsymbol{A}_{k_lk_i}\neq\boldsymbol{0},$$

即为非$\boldsymbol{0}$矩阵．设$x\in\Lambda_A$，使$a_{x_0x_1}$在$\boldsymbol{A}_{k_lk_i}$内．利用命题5的证明中使用的方法，可以证明，不存在$G(\boldsymbol{A})$的闭路经过顶点$a_{x_0x_1}$．因此，这样的$\boldsymbol{A}_{k_lk_i}$不存在，即

$$A=\begin{pmatrix} A_{k_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_{k_s} \end{pmatrix}.$$

其中 $A_{k_l}(0<l\leqslant s)$是不可约的. 据命题 5,

$$\Omega(\sigma_A)=\Lambda_A. \qquad \square$$

命题 7 $\overline{P(\sigma_A)}=\Omega(\sigma_A)$. 即周期点集在非游荡集内处处稠密.

证明 $\overline{P(\sigma_A)}\subset\Omega(\sigma_A)$是明显的. 下面证明

$$\overline{P(\sigma_A)}\supset\Omega(\sigma_A).$$

设 $x\in\Omega(\sigma_A)$. 据命题 1 的 iii, 对任意的 $i>0$, 存在 $G(A)$ 的闭路

$$a_{x_0x_1}\to a_{x_1x_2}\to\cdots\to a_{x_ix_{i+1}}\to a_{x_{i+1}x_0}.$$

因此$(x_0\ x_1\ \cdots\ x_{i+1})$是可允许序列. 由这个可允许序列作循环节生成的 σ_A 的周期点记为 p_i, 易见

$$p_i\to x. \qquad (i\to\infty)$$

因此 $\Omega(\sigma_A)\subset\overline{P(\sigma_A)}$. 证毕.

§13.2 回复性及其他

设 $k\geqslant 2$ 和$(S^{\mathbb{Z}},\ \sigma)$以及 $A=(a_{ij})$同上. 下面先给出子转移 σ_A 的拓扑传递性的一些等价条件.

命题 8 下述条件等价:

i) σ_A 拓扑传递;

ii) $G(A)$有一条闭路, 过所有顶点;

iii) A 是不可约的;

iv) 对任意 $0\leqslant i,\ j<k$, 存在 $n>0$, 使

$$\{x\in\Lambda_A\mid x_0=i,\ x_n=j\}\neq\varnothing.$$

证明 i⇒ii 设 $x\in\Lambda_A$, 使

$$\overline{\mathrm{orb}(x)}=\Lambda_A.$$

显然，只须证明从 $a_{x_0x_1}$ 到 $G(\boldsymbol{A})$ 的任意顶点 $a_{ij}(0\leqslant i,\ j<k)$ 存在闭路即可. 设

$$y=(i\ j\ y_2\ y_3\ \cdots)\in\Lambda_A.$$

据假设，存在 $m_1>m_2>0$，使得

$$\rho(\sigma_A^{m_2}(x),\ y)<\frac{1}{2},\qquad \rho(\sigma_A^{m_1}(x),\ x)<\frac{1}{2}.$$

据度量 ρ 的定义，易见

$$x_{m_2}=i,\quad x_{m_2+1}=j,\quad x_{m_1}=x_0,\quad x_{m_1+1}=x_1.$$

因此

$$a_{x_0x_1}\to a_{x_1x_2}\to\cdots\to a_{x_{m_2}x_{m_2+1}}\to\cdots\to a_{x_{m_1}x_{m_1+1}}(=a_{x_0x_1})$$

是过 $a_{x_0x_1}$ 和 a_{ij} 的闭路.

ii $\Leftrightarrow$ iii　见命题 3.

iii $\Rightarrow$ iv　是命题 2 的简单推论.

iv $\Rightarrow$ i　设 ${}_0[i_0\ \cdots\ i_n]_A$，${}_0[j_0\ \cdots\ j_m]_A$ 是任意两个相对柱形 $(n>0,\ m>0)$. 据 iv，存在可允许序列

$$(i_n\ l_1\ \cdots\ l_h\ j_0),$$

其中 $h>0$. 显然

$${}_0[i_0\ \cdots\ i_n\ l_1\ \cdots l_h\ j_0\ \cdots\ j_m]_A\subset{}_0[i_0\ \cdots\ i_n]_A.$$

故

$$\begin{aligned}&\sigma_A^{n+h+1}({}_0[i_0\ \cdots\ i_n\ l_1\ \cdots\ l_h\ j_0\cdots\ j_m]_A)\\&\quad={}_0[j_0\ \cdots\ j_m]_A\subset\sigma_A^{n+h+1}({}_0[i_0\ \cdots\ i_n]_A).\end{aligned}$$

据命题 1，σ_A 是拓扑传递的. 证毕.

推论　σ_A 是拓扑传递的，当且仅当存在可允许循环节包含全部 k 个符号.

证明　先证必要性. 据命题 8 的 ii，设 P 是 $G(\boldsymbol{A})$ 的过所有顶点的闭路. 因为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的每一行和每一列元素均不全为 0，显然 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的每一行和每一列均有 $G(\boldsymbol{A})$ 的顶点. 这明显蕴涵 P 的顶点中包含了全部 k 个符号，因此它决定的可允许循环节(见 §12.2)包含全部 k 个符号. 这就证明了必要性.

充分性是明显的. 因为 σ_A 有可允许循环节包含全部 k 个符

号蕴涵命题 8 中的 iv. 证毕.

值得注意的是，存在一个包含全部 k 个符号的可允许循环节不等价于存在包含全部 k 个符号的可允许序列. 例如，取

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

易见 $a_{11}\to a_{10}\to a_{00}$ 是 $G(\boldsymbol{A})$ 的有向路径，它决定的可允许序列

$$(1\ 1\ 0)$$

包含全部 2 个符号 0 和 1，但明显地，$\boldsymbol{A}$ 是可约的，故据命题 8，σ_A 不是拓扑传递的.

据 § 12 的命题 6，有限型子转移的周期点集总是不空的，而非平凡极小集不能包含周期点，因此，一个有限型子转移若是极小的，就只能是平凡极小的，即它的底空间由一条周期轨道构成. 下面给出极小有限型子转移一个全面的刻划.

命题 9 下述条件等价:

i) σ_A 是极小的;

ii) Λ_A 有限，且 σ_A 是拓扑传递的;

iii) $P(\sigma_A)=\Lambda_A$ 由 σ_A 的一条周期轨道构成;

iv) $G(\boldsymbol{A})$只有一条不可约闭路，它过 $G(\boldsymbol{A})$的全部顶点;

v) $\boldsymbol{A}$ 的每一行和每一列都只有一个元素不为 0，且它们都不在 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上.

证明 i $\Rightarrow$ ii σ_A 的极小性蕴涵 $\Omega(\sigma_A)=\Lambda_A$. 又据 § 12 命题 6 和这里的命题 5，我们有

$$\varnothing\neq\overline{P(\sigma_A)}=\Omega(\sigma_A)=\Lambda_A.$$

若 Λ_A 无限，从而 $P(\sigma_A)$亦无限，σ_A 就不可能是极小的. 这就证明了 Λ_A 有限. σ_A 的拓扑传递性是明显的.

ii $\Rightarrow$ iii 若 Λ_A 有限，但 $P(\sigma_A)\neq\Lambda_A$ 或 $P(\sigma_A)=\Lambda_A$ 而至少包含 σ_A 的两条不同周期轨道，都明显蕴涵 σ_A 不可能是拓扑传递的，均矛盾.

iii $\Rightarrow$ iv 显然，σ_A 的唯一的周期轨道决定 $G(\boldsymbol{A})$的唯一不可

约闭路(见§12.2)，而这个不可约闭路一定过$G(\boldsymbol{A})$的全部顶点则是很明显的，否则σ_A的周期轨道不唯一。

iv ⇒ v 易见

$$a_{ii}=0, \qquad \forall\, 0\leqslant i<k$$

否则，对某个$0\leqslant i<k$，$a_{ii}=1$，则

$$a_{ii}\to a_{ii}$$

是一条闭路，而且是不可约的，这与 iv 矛盾.

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的第i行有两个元素不为0，即

$$a_{ij}=1, \qquad a_{il}=1, \qquad 0\leqslant i,\ j,\ l<k,\ i\neq j,\ i\neq l,\ j\neq l$$

据关于$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的假设，存在$0\leqslant h<k$，使得

$$a_{hi}=1.$$

所以

$$a_{hi}\to a_{ij}, \qquad a_{hi}\to a_{il}$$

是$G(\boldsymbol{A})$的两个不同的有向弧. 易于证明，这将导致$G(\boldsymbol{A})$有不同不可约闭路，与 iv 矛盾.

v ⇒ i 在假设条件下，易于看出，如果不计循环次序的话，存在唯一的可允许k-循环节，它是可允许周期节且是不可约的. 由这个k可允许不可约周期节生成σ_A的唯一周期轨道中的k个不同点构成Λ_A. 因此，σ_A是极小的. 证毕.

推论 极小有限型子转移有零拓扑熵.

这是极小有限型子转移的底空间有限的简单推论.

有限型子转移与一般子转移在动力性状上可以大相径庭，上述推论就是一个重要不同，即一般极小子转移可以有正拓扑熵(参见[20]).

命题 10 若σ_A是非极小拓扑传递的，则$P(\sigma_A)$是无限非闭集合.

证明 设σ_A非极小拓扑传递，则存在$x\in\Lambda_A$，使

$$\omega(x,\ \sigma_A)=\Lambda_A=\Omega(\sigma_A).$$

据§2的命题4的推论，$\omega(x,\ \sigma)$是不可数的. 又据命题7,

$$\overline{P(\sigma_A)}=\Omega(\sigma_A)=\omega(x,\ \sigma_A).$$

因此，$P(\sigma_A)$是无限的. $P(\sigma_A)$的非闭性是明显的，因为$P(\sigma_A)$是可数的，但$\overline{P(\sigma_A)}$是不可数的，因而$P(\sigma^A)\neq\overline{P(\sigma_A)}$. 证毕.

命题 11 若σ_A是非极小拓扑传递的，则

$$P(\sigma_A)\subsetneqq\Omega(\sigma_A)\cap EP(\sigma_A),$$

且$\Omega(\sigma_A)$不可数，其中$EP(\sigma_A)$表示σ_A的终于周期点集(见§2的定义5).

证明 设σ_A是非极小拓扑传递的. 我们断言，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$中至少含$k+1$个不为0的元素. 用反证法证明之. 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$只有k个不为0的元素(据关于$\boldsymbol{A}$的假设，$\boldsymbol{A}$的不为0的元素不能少于k). 因为σ_A不是极小的，据命题9，其中某个不为0的元素位于$\boldsymbol{A}$的主对角线上. 易见，由这个非0元素所决定的$G(\boldsymbol{A})$的顶点是孤立的(注意，$\boldsymbol{A}$的每一行和每一列只有一个元素不为0)，即既无有向弧由它通向不同于它的其他顶点，也无有向弧由不同于它的其他顶点通向它. 这明显蕴涵$G(\boldsymbol{A})$无闭路经过所有顶点，与命题8的ii矛盾，断言得到证明. 因此，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$至少有一列含两个非0元素. 即存在

$$a_{i_0j}=1,\qquad a_{i_1j}=1,\qquad\qquad 0\leqslant i_0<i<k,\ 0\leqslant j<k$$

据命题8的推论，可设$(j\cdots l)$是包含全部k个符号的可允许循环节. 易见

$$(i_0\,j\cdots l\,j\cdots l\cdots)\in\Lambda_A,\quad (i\,j\cdots l\,j\cdots l\cdots)\in\Lambda_A,$$

且其中至少一个是σ_A的非周期终于周期点. 因为σ_A是拓扑传递的，据命题6和命题8，有

$$\Lambda_A=\Omega(\sigma_A).$$

这就证明了$P(\sigma_A)\subsetneqq\Omega(\sigma_A)\cap EP(\sigma_A)$.

显然，$P(\sigma_A)\subsetneqq\Omega(\sigma_A)$. 由$\sigma_A$的拓扑传递性，存在$x\in R(\sigma_A)-EP(\sigma_A)$，使

$$\omega(x,\ \sigma)=\Lambda_A=\Omega(\sigma_A).$$

故据§2的命题4，$\Omega(\sigma_A)$不可数. 证毕.

四

甲

极小的有限型子转移有有限的周期点集．反过来当然不一定成立．下面的命题全面地描述了具有有限周期点集的有限型子转移．

命题12 设 $A=(a_{ij})$ 已有标准型(见§10的命题3)，则下述条件等价：

i) $P(\sigma_A)$有限；

ii) $P(\sigma_A)=\Omega(\sigma_A)$；

iii) $\Omega(\sigma_A)=R(\sigma_A)$；

iv) $R(\sigma_A)=P(\sigma_A)$；

v) $R(\sigma_A)$有限；

vi) $\Omega(\sigma_A)$有限；

vii) Λ_A 可数；

viii) $\Omega(\sigma_A)\cap EP(\sigma)=P(\sigma_A)$；

ix) $\Lambda_A=EP(\sigma_A)$；

x) $\sigma_{A_{ll}}(0<l\leqslant s)$都是极小的．

证明 i$\Rightarrow$ii 据命题7，

$$P(\sigma_A)=\overline{P(\sigma_A)}=\Omega(\sigma_A).$$

ii$\Rightarrow$iii 因为 $P(\sigma_A)\subset R(\sigma_A)\subset\Omega(\sigma_A)$，显然

$$\Omega(\sigma_A)=R(\sigma_A).$$

iii$\Rightarrow$iv 若 $x\in R(\sigma_A)-P(\sigma_A)$，则据§2的命题4的推论，$\omega(x,\sigma_A)$ 不可数，因而 $\Omega(\sigma_A)$ 也不可数．据命题5和命题9的iii，至少存在一个 l，$0<l\leqslant s$，使 $\sigma_{A_{ll}}$ 是拓扑传递但非极小的．不失普遍性，可设 σ_A 拓扑传递但非极小．用命题11的证明方法，可以证明 σ_A 有非周期的终于周期点，而这种点是 σ_A 的非游荡点但不是它的回复点．这导致

$$\Omega(\sigma_A)\supsetneqq R(\sigma_A)$$

的矛盾．因此

$$P(\sigma_A)=R(\sigma_A).$$

iv$\Rightarrow$v 若 $R(\sigma_A)$无限，则 $\Omega(\sigma_A)$亦无限．据命题7，$P(\sigma_A)$

亦无限．据命题5和§12的命题3，至少有一个l，$0<l\leqslant s$，使$\boldsymbol{A}_{k_l}$是拓扑传递但非极小的．这明显蕴涵$R(\sigma_{A_{k_l}})\subsetneqq P(\sigma_{A_{k_l}})$，因而$R(\sigma_A)\subsetneqq P(\sigma_A)$．这与iv矛盾．故$R(\sigma_A)$有限．

v $\Rightarrow$ vi　据命题7，

$$\overline{P(\sigma_A)}=\overline{R(\sigma_A)}=\Omega(\sigma_A).$$

故$\Omega(\sigma_A)$无限蕴涵$R(\sigma_A)$亦无限．

vi $\Rightarrow$ vii　据命题5，

$$\Omega(\sigma_A)=\bigcup_{0<l\leqslant s}\Lambda_{A_{k_l}}.$$

因此，$\Omega(\sigma_A)$有限蕴涵每一个$\Lambda_{A_{k_l}}$有限．因为每一个$\boldsymbol{A}_{k_l}$都是不可约的(§11的命题3)，因而$\sigma_{A_{k_l}}$都是拓扑传递的(命题8)．据命题11，每一个$\Lambda_{A_{k_l}}$都是由σ_A的一条周期轨道构成．从$\boldsymbol{A}$的下三角的标准型易见，$G(\boldsymbol{A})$的每一条有向路径在有限步都进入某个$G(\boldsymbol{A}_{k_l})$内最后不再出来．由此易见，Λ_A的每一点都是σ_A的终于周期点．注意到σ是k对1的，终于周期点集的可数性是显而易见的．

vii $\Rightarrow$ viii　Λ_A可数蕴涵每一个$\sigma_{A_{k_l}}$都是极小的．据命题5和命题9，我们有

$$\Omega(\sigma_A)=\bigcup_{0<l\leqslant s}\Lambda_{A_{k_l}}=\bigcup_{0<l\leqslant s}P(\sigma_{A_{k_l}})=P(\sigma_A).$$

因此

$$\Omega(\sigma_A)\cap EP(\sigma_A)=P(\sigma_A).$$

viii $\Rightarrow$ ix　据命题11，每一个$\sigma_{A_{k_l}}$都是极小的．再据命题9，每一个$\Lambda_{A_{k_l}}$都是由σ_A的一条周期轨道构成的．因此，$P(\sigma_A)$是有限集．同vi$\Rightarrow$vii中的证明一样，易证Λ_A中每一点都是σ_A的终于周期点．

ix $\Rightarrow$ x　设对某个l，$0<l\leqslant s$，$\sigma_{A_{k_l}}$不是极小的．据命题11，$\Omega(\sigma_{A_{k_l}})\subset\Omega(\sigma_A)$不可数．但$EP(\sigma_A)$总是可数的，导致矛盾．因此，每一个$\sigma_{A_{k_l}}$都是极小的．

x ⇒ i　据命题 9, 每一个 $P(\sigma_{A_{kl}})$ 都由 σ_A 的一条周期轨道构成, 因而有限. 又,

$$P(\sigma_A)=\bigcup_{0<l\leq s} P(\sigma_{A_{kl}}),$$

故 $P(\sigma_A)$ 亦有限. 命题全部证毕.

§ 14　有限型子转移的拓扑熵与混沌

本节讨论有限型子转移的拓扑熵估计与计算, 混沌的判定和正拓扑熵与混沌以及其他动力性状之间的关系问题. 我们先给出子转移的拓扑熵的两个计算公式, 其中一个适用于一般子转移, 而另一个只适用于有限型子转移. 后者通过 0, 1-方阵的谱半径彻底解决了有限型子转移的拓扑熵计算问题. 然后, 我们讨论正拓扑熵与混沌的判定问题, 给出一系列等价的条件.

§ 14.1　子转移的拓扑熵计算

设 $k\geq 2$, $(S^{\mathbb{Z}_+}, \sigma)$, $A\in L(S^{\mathbb{Z}_+})$, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $k\times k$ 阶 0, 1-方阵.

命题 1　σ: $S^{\mathbb{Z}_+}\to S^{\mathbb{Z}_+}$ 是可扩的.

证明　易于从 § 6 的定义 7 直接证明. 下面我们通过构造一个生成子给出证明(§ 6 的命题 15).

记

$$A_i=\{x\in S^{\mathbb{Z}_+}\mid x_0=i\}.\qquad i=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1$$

易见 $\alpha=\{A_0,\ \cdots,\ A_{k-1}\}$ 是 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 的一个开覆盖. 又, 易见

$$\sigma^{-n}(A_i)=\{x\in S^{\mathbb{Z}_+}\mid x_n=i\}.\qquad i=0,\ \cdots,\ k-1$$

设 $\{A_{i_n}\}_{n=0}^{\infty}$ 是 α 的元素的任一个序列. 容易看出,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty}\sigma^{-n}(A_{i_n})=\{(i_0\, i_1\, \cdots\, i_n\, \cdots)\}.$$

据 § 6 的定义 6, α 是 σ 的一个生成子(注意, $\overline{A}_i=A_i$, $i=0,\ \cdots,\ k-1$). □

这个生成子 α 叫作"σ 的自然生成子".

推论 σ_A亦是可扩的，且

$$\alpha_A=\{A_0\cap A,\ \cdots,\ A_{k-1}\cap A\}$$

是σ_A的一个生成子.

显然，证明从略.

下面记

$$\begin{aligned}Q_n(A)&=\#(\{(i_0\cdots i_{n-1})\mid \exists x\in A,\ \text{使}\ x_0=i_0,\ \cdots,\ x_{n-1}=i_{n-1}\})\\&=\#(\{(i_0\cdots i_{n-1})\mid {}_0[i_0\cdots i_{n-1}]_A\neq\varnothing\}).\end{aligned}$$

命题 2

$$\mathrm{ent}(\sigma_A)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(A).$$

证明 设$n\geqslant 0$. 从上面的定义，我们有

$${}_0[i_0\cdots i_{n-1}]_A\neq\varnothing\Leftrightarrow A_{i_0}\cap\sigma_A^{-1}(A_{i_1})\cap\cdots\cap\sigma_A^{-(n-1)}(A_{i_{n-1}})\neq\varnothing.$$

而且，若$x\in{}_0[i_0\cdots i_{n-1}]_A$，则

$$A_{i_0}\cap\sigma_A^{-1}(A_{i_1})\cap\cdots\cap\sigma_A^{-(n-1)}(A_{i_{n-1}})$$

是$\alpha_A\cap\sigma_A^{-1}(\alpha_A)\cap\cdots\cap\sigma_A^{-(n-1)}(\alpha_A)$中包含$x$的唯一元素. 因此

$$Q_n(A)=N\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1}\sigma_A^{-i}(\sigma_A)\Big),$$

从而

$$\begin{aligned}\log Q_n(A)&=\log N\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1}\sigma_A^{-i}(\alpha_A)\Big)\\&=H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1}(\sigma_A^{-i}(\alpha_A))\Big)\end{aligned}$$

(见§6). 据§6的命题14，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{ent}(\sigma_A)=\mathrm{ent}(\sigma_A,\ \alpha_A)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1}\sigma_A^{-i}(\alpha_A)\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(A).\end{aligned}$$

□

注意，命题2中的$A\in L(S^{\mathbb{Z}_+})$是一般不变闭子集，即命题2适用于所有子转移.

命题 3 $$\mathrm{ent}(\sigma_A)=\log\rho(\boldsymbol{A}),$$

其中$\rho(\boldsymbol{A})$是0, 1-方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的谱半径(见§11).

证明 设 $n\geqslant 0$. 据§13的命题2,

$$\{x\in\Lambda_A \mid x_0=i_0,\ \cdots,\ x_{n-1}=i_{n-1}\}\neq\varnothing$$

当且仅当

$$a_{i_0i_1}\to a_{i_1i_2}\to\cdots\to a_{i_{n-2}i_{n-1}}$$

是 $G(\boldsymbol{A})$ 的有向路径, 当且仅当

$$a_{i_0i_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{n-2}i_{n-1}}=1.$$

因此,

$$Q_n(\Lambda_A)=\sum_{i_0,\cdots,i_{n-1}=0}^{k-1}a_{i_0i_1}\cdots a_{i_{n-2}i_{n-1}}=\sum_{i_0,i_{n-1}=0}^{k-1}a_{i_0i_{n-1}}^{(n-1)}.$$

我们在 $k\times k$ 阶方阵集合 M_k 上定义模

$$\|\boldsymbol{B}\|=\sum_{i,j=0}^{k-1}|b_{ij}|,\qquad \forall\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in M_k$$

则

$$Q_n(\Lambda_A)=\|\boldsymbol{A}^{n-1}\|.$$

据命题2和§11的命题1, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{ent}(\sigma_A)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(\Lambda_A)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|\boldsymbol{A}^{n-1}\|\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\log\|\boldsymbol{A}^{n-1}\|^{\frac{1}{n-1}}=\log\rho(\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

□

推论 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 已有标准型, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{k_1} & & & & & \\ \boldsymbol{0} & \ddots & & \boldsymbol{0} & & \\ \vdots & & & & & \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_{k_r} & & & \\ \boldsymbol{A}_{k_{r+1}k_1} & \cdots & & \boldsymbol{A}_{k_{r+1}} & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ \boldsymbol{A}_{k_sk_1} & \cdots & & & \cdots & \boldsymbol{A}_{k_s}\end{pmatrix},$$

则

$$\mathrm{ent}(\sigma_A)=\max_{0<i\leqslant s}\{\mathrm{ent}(\sigma_{A_{k_i}})\}.$$

证明 显然, 特征多项式

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}_k|=|\boldsymbol{A}_{k_1}-\lambda\boldsymbol{I}_{k_1}|\cdots|\boldsymbol{A}_{k_s}-\lambda\boldsymbol{I}_{k_s}|,$$

其中 $\boldsymbol{I}_{k_1}$, $\cdots$, $\boldsymbol{I}_{k_s}$ 分别为 k_1, $\cdots$, k_s 阶单位方阵. 显然, $\boldsymbol{A}$ 的全体

特征值的集合是 A_{k_1}, …, A_{k_s} 的特征值的集合的并集，故 A 的谱半径即是某个 $A_{k_l}(0<l\leqslant s)$的谱半径．据命题 3，推论得证．

命题 4 $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$ 当且仅当至少存在两个同长度且有公共符号的不同的可允许循环节．

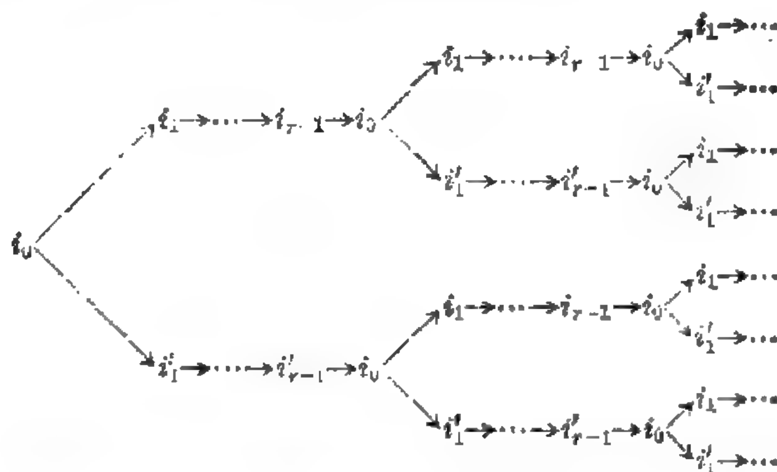
证明 据命题 3 的推论，不失普遍性，可设 A 是不可约的，因而 σ_A 是拓扑传递的．

设 $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$．据 §13 的命题 9 的推论，σ_A 不是极小的．据 §13 的命题 9，A 至少存在一行，例如第 i 行$(0\leqslant i<k)$，它上面至少有两个不为 0 的元素．据 §13 的命题 8，$G(A)$有一条闭路过所有顶点．易见，这蕴涵存在一个可允许循环节，符号 i 在其内至少出现两次．在符号 i 处可把这个可允许循环节分解成两个不同的可允许循环节，它们都含有符号 i．把这两个可允许循环节重复不同倍数，使得到的两个新的可允许循环节长度相同．显然，它们仍然不同，但都含有符号 i．这就证明了必要性．

下证充分性．设

$$(i_0\ i_1\ \cdots\ i_{r-1}),\qquad (i_0\ i_1'\ \cdots\ i_{r-1}')$$

是两个长度为 $r\geqslant 2$ 的可允许循环节，其中 $i_j\neq i_j'$ 至少一个成立，$j=1,\ \cdots,\ r-1$．容易看出，在下面图表中，



任何从 i_0 起沿箭头方向连续前进有限步所得到的有限序列都是可允许的．记这样得到的 n 序列的基数为 Q_n'．易由归纳法证明

$$Q_{nr+j}'=2^{n+1},\qquad j=2,\ \cdots,\ r+1,\quad \forall n\geqslant 0$$

显然,

$$Q_n' \leqslant Q_n(\Lambda_A), \qquad \forall n \geqslant 0$$

据命题 2, 我们有

$$\begin{aligned} \operatorname{ent}(\sigma_A) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n(\sigma_A) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n' \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nr+j} \log 2^{n+1} = \frac{1}{r} \log 2 > 0. \end{aligned} \qquad \square$$

推论 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可约. 则

$$\operatorname{ent}(\sigma)=0$$

当且仅当 σ_A 是极小的.

证明 必要性的证明包含在命题 4 的证明中. 因为那里指出, 若 σ_A 非极小, 则至少存在两个有相同长度和有公共符号的不同的可允许循环节. 据命题 4, $\operatorname{ent}(\sigma_A)>0$, 矛盾.

充分性由 § 13 的命题 9 的推论给出. $\square$

下面用 N_n 表示不动点集 $F(\sigma_A^n)$ 的基数, $\forall n>0$.

命题 5 $\operatorname{ent}(\sigma_A)=\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N_n$.

证明 据命题 3 的推论, 可设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是不可约的, 因而 σ_A 是拓扑传递的.

先设 σ_A 是极小的. 据 § 13 的命题 9 的推论, $\operatorname{ent}(\sigma_A)=0$. 又据 § 13 的命题 9, Λ_A 有限, 因而 N_n 有限, $\forall n>0$. 显然

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N_n = 0.$$

结论成立.

下设 σ_A 不是极小的. 据 § 13 命题 8 的推论, 存在包含全部 k 个符号的可允许循环节, 设其长度为 $M \geqslant k$. 因此, 对任意 $0 \leqslant i, j < k$, 存在从 i 到 j 的可允许有限序列, 其长度不超过 M. 这蕴涵, 对任意可允许 n-序列, 存在长度不超过 $n+M$ 的可允许循环节, 它的前 n 个符号构成的子序列等于给定的可允许 n-序列, 即每一个可允许 n-序列, 对应一个长度介于 n 和 $n+M$ 之间的可允许循环节, 而后者决定 σ_A 的一个周期不大于 $n+M$ 的周期点.

容易看出

$$\sum_{i=0}^{M} N_{n+i} \geqslant Q_n(\Lambda_A). \qquad \forall n>0$$

易见，对每一个 $n>0$，存在 $0<j\leqslant M$，使得

$$M\cdot N_{n+j}=M\max_{0<i\leqslant M} N_{n+i}.$$

明显地，存在一个固定的 $0<j\leqslant M$ 和递增序列 n_l，使

$$M\cdot N_{n_l+j}=M\cdot\max_{0<i\leqslant M} N_{n_l+i}. \qquad \forall l>0$$

于是有

$$M\cdot N_{n_l+j}\geqslant Q_{n_l}(\Lambda_A). \qquad \forall l>0$$

由此，据命题 2，我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{ent}(\sigma_A) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(\Lambda_A)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{n_l}\log Q_{n_l}(\Lambda_A)\\
&\leqslant \limsup_{l\to\infty}\frac{1}{n_l}\log M\cdot N_{n_l+j}\\
&= \limsup_{l\to\infty}\frac{1}{n_l}\log N_{n_l+j}+\limsup_{l\to\infty}\frac{1}{n_l}\log M\\
&= \limsup_{l\to\infty}\frac{n_l+j}{n_l}\cdot\frac{1}{n_l+j}\log N_{n_l+j}\\
&\leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n.
\end{aligned}$$

另外，显然

$$N_n\leqslant Q_n(\Lambda_n). \qquad \forall n>0$$

因此，

$$\begin{aligned}
\operatorname{ent}(\sigma_A) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(\Lambda_A)\\
&\geqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n. \qquad \square
\end{aligned}$$

一般而言，我们有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n\neq\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n,$$

即极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n$ 不存在．这是与全转移的不同之处．因为，事实上，对全转移自映射 σ 而言，有

$$N_n = k^n. \qquad \forall\, n>0$$

因此 $\quad \operatorname{ent}(\sigma)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log k^n=\log k.$

[例] 设

$$G(A)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

易于看出，有向闭路

$$a_{02}\to a_{21}\to a_{10}, \qquad a_{02}\to a_{23}\to a_{30}$$

决定了仅有的两个同长度可允许不可约周期节

$$(0\ 2\ 1), \qquad (0\ 2\ 3).$$

它们有公共符号 0 和 2. 据命题 4, 有

$$\operatorname{ent}(\sigma_A)=\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log N_n>0.$$

但是，容易看出 σ_A 的所有周期点的周期都是 3 的倍数，因此

$$N_{3n+1}=0. \qquad \forall n>0$$

显然，极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n$ 不存在。

§14.2 有限型子转移的混沌性状

设 $k\geqslant 2$, (S^{Z_+}, σ), $A=(a_{ij})$ 为 $k\times k$ 阶 0, 1-方阵.

有限型子转移 σ_A 的混沌性状也同样为 $A=(a_{ij})$ 所决定. 而且，当 σ_A 混沌时，也与全转移 σ 类似，存在较强的混沌集，也存在与每一个点相联系的一般混沌集. 进而，我们证明对有限型子转移而言，正拓扑熵与混沌等价.

命题 6 设 $A=(a_{ij})$是不可约的. 则 σ_A 是混沌的当且仅当 σ_A 不是极小的.

证明 据 §13 的命题 9, 若 σ_A 是极小的, 则 Λ_A 由 σ_A 的一条周期轨道构成, σ_A 当然不是混沌的.

下设 σ_A 不是极小的. 正如在命题 4 中所证明的那样, 存在两个长度相同并有公共符号的不同可允许循环节. 设它们是

$$P=(i_0\, i_1 \cdots i_{r-1}), \qquad Q=(i_0\, i'_1 \cdots i'_{r-1}),$$

其中 $i_j \neq i'_j$ 至少一个成立, $j=1, \cdots, r-1$, $r>0$. 我们构造 σ_A 的一个混沌集如下:

由可允许循环节

$$P=(i_0 \cdots i_{r-1})$$

可生成 σ_A 的一个周期点

$$x=PP\cdots=(i_0 \cdots i_{r-1}\, i_0 \cdots i_{r-1} \cdots).$$

易见, $\mathscr{E}=\{M_0M_1\cdots \mid M_i=P$ 或 Q, $\forall i\geqslant 0\}$ 是 Λ_A 的子集合. 对每一个实数 $\eta\in(0, 1)$, 构造

$$x^\eta=M_0^\eta M_1^\eta\cdots\in\mathscr{E}$$

满足

$M_i^\eta=P \Leftrightarrow$ 存在 $l\geqslant 0$, 使得 $i=l^2$ 且 $[(l+1)\eta]-[l\eta]=1$.

记 $C=\{x^\eta\in\Lambda_A \mid \eta\in(0, 1)\}$.

设 $0<\theta<\eta<1$. 类似 § 8.3 的引理 2 后面的讨论, 我们有下述简单事实.

i) $M_{l^2+j}^\theta=Q$, $j=1, \cdots, 2l+1$, $\forall l\geqslant 0$;

ii) 存在无限多整数 $l>0$, 使 $M_{l^2}^\theta=P$;

iii) 存在无限多整数 $l>0$, 使 $M_{l^2}^\theta\neq M_{l^2}^\eta$.

易见, iii 蕴涵

$$x^\theta\neq x^\eta.$$

因此 C 是不可数的. 同时, iii 亦蕴涵

$$\limsup_{n\to\infty}\rho(\sigma_A^n(x^\theta),\ \sigma_A^n(x^\eta))>0.$$

$$\forall\theta,\ \eta\in(0, 1),\ \theta\neq\eta$$

再者, 1 明显地蕴涵

$$\liminf_{n\to\infty}\rho(\sigma_A^n(x^\theta),\ \sigma_A^n(x^\eta))=0. \qquad \forall\theta,\ \eta\in(0, 1)$$

这就证明了 σ_A 是混沌的. □

下述两个推论的证明是简单的，这里从略。

推论 1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 已有标准型，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k_1} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ * & & \boldsymbol{A}_{k_s} \end{pmatrix}.$$

则 σ_A 是混沌的当且仅当某个 $\sigma_{A_{k_l}}$ 是混沌的，当且仅当某个 $\sigma_{A_{k_l}}$ 不是极小的，$0<l\leqslant s$.

推论 2 σ_A 混沌当且仅当 σ_A 在非游荡集 $\Omega(\sigma_A)$ 上混沌.

命题 7 σ_A 是混沌的当且仅当存在整数 $r>0$，使得 σ_A^r 有一个子系统与 2-单边转移自映射拓扑共轭.

证明 设 σ_A 混沌. 据命题 6 的推论 1，不失普遍性，可设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可约. 据命题 6，σ_A 是拓扑传递的但不是极小的. 类似 § 13 的命题 9 证明中那样，设

$$P=(i_0\ i_1\ \cdots\ i_{r-1}),\quad Q=(i_0\ i_1'\ \cdots\ i_{r-1}')$$

是两个同长度有公共符号的不同可允许循环节，其中 $i_j\neq i_j'$ 至少一个成立，$j=1,\ \cdots,\ r-1,\ r>0$. 同样，记

$$\mathscr{E}=\{M_0M_1\cdots\mid M_i=P\ 或\ Q,\ \forall i\geqslant 0\}.$$

易见，$\mathscr{E}$ 是 Λ_A 的一个闭子集，且对 σ_A^r 不变. 于是

$$\sigma_A^r|_{\mathscr{E}}:\qquad \mathscr{E}\to\mathscr{E}$$

是 σ_A^r 的一个子系统.

另一方面，我们可以把 P 和 Q 当作两个新的符号，$\mathscr{E}$ 可以看成是由这两个符号 P 和 Q 构成的新的 2-单边符号空间，而

$$\sigma_A^r|_{\mathscr{E}}:\qquad \mathscr{E}\to\mathscr{E}$$

恰好就是其上的转移自映射. 在这个意义上，我们说 σ_A^r 有一个子系统与 2-单边转移自映射拓扑共轭. 这就给出了必要性的证明.

充分性是明显的，因为拓扑共轭保持混沌性状，而 σ_A^r 的子系

统的混沌集也是σ_A^r的混沌集，同时也是σ_A的混沌集。 □

推论 1 设

$$A=\begin{pmatrix} A_{k_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ * & & A_{k_s} \end{pmatrix},$$

即$A=(a_{ij})$有标准型。如果对某个$0<l\leqslant s$，$\sigma_{A_{k_l}}$是非极小的，则下述结论成立：

i）存在$r>0$，σ_A有rn-周期，$\forall n>0$；

ii）存在不可数混沌集$C\subset\Lambda_A-P(\sigma_A)$，$\sigma_A^r(C)\subset C$，满足

A）$\limsup\limits_{n\to\infty}\rho(\sigma_A^n(x),\ \sigma_A^n(y))\geqslant 1,\ \forall x,y\in C,\ x\neq y$，

B）$\liminf\limits_{n\to\infty}\rho(\sigma_A^n(x),\ \sigma_A^n(y))=0,\ \forall x,y\in C$，

C）$\liminf\limits_{n\to\infty}\rho(\sigma_A^n(x),\ \sigma_A^n(p))>0,\ \forall x\in C,\ p\in P(\sigma_A)-\{e\}$，

其中e是σ_A的一个r-周期点。

再者，存在σ_A的r-周期点p（这里r不一定是最小周期）和与p相联系的混沌集C_p。

证明 据命题7，存在$r>0$，使σ_A^r有一个子系统与2-单边转移自映射拓扑共轭。在§8的命题8中表述的2-单边转移自映射的性质在拓扑共轭下成为σ_A^r的对应子系统的相应性质，它们就是本命题中的i和ii。

再据§8的命题9，2-单边转移自映射对每一点可以联系一个混沌集。显然，新的2-单边转移自映射的不动点在所述拓扑共轭下对应σ_A的一个r-周期点，这个不动点所联系的混沌集在拓扑共轭下对应与σ_A的这个r-周期点相联系的混沌集。 □

命题4和命题6事实上已经证明了对有限型子转移而言，正拓扑熵与混沌等价。下面我们进一步给出这个结论的一系列等价条件。

命题 8 下述条件等价：

i) $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$;

ii) σ_A 的周期集合无限;

iii) σ_A 有周期 $>k$;

iv) 存在可允许可约周期节;

v) 存在有公共符号的不同的可允许周期节;

vi) 存在两个长度相同的不同可允许循环节，它们有公共符号;

vii) σ_A 是混沌的;

viii) σ_A 有混沌点偶;

ix) 存在 $x\in\Lambda_A$, $\omega(x, \sigma_A)$不是一条周期轨道;

x) 存在 $x\in\Lambda_A$, $\omega(x, \sigma_A)$无限;

xi) $G(\boldsymbol{A})$有两条不同不可约闭路过同一个顶点.

证明 i $\Rightarrow$ ii 若 σ_A 的周期有限，则显然它的周期点集 $P(\sigma_A)$亦有限. 据 § 13 的命题 7，它的非游荡集 $\Omega(\sigma_A)=P(\sigma_A)$. 因此

$$\mathrm{ent}(\sigma_A)=\mathrm{ent}(\sigma_A|\Omega(\sigma_A))=0,$$

矛盾.

ii $\Rightarrow$ iii 明显.

iii $\Rightarrow$ iv 显然，周期大于 k 的可允许周期节有重复的符号，即为可允许可约周期节.

iv $\Rightarrow$ v 可允许可约周期节有公共符号，且由可允许不可约周期节生成. 显然，在生成这个可允许可约周期节的所有可允许不可约周期节之中，至少有两个有公共符号.

v $\Rightarrow$ vi 可重复不同倍数，使两个有公共符号的不同的可允许循环节生成两个同长度不同的但有公共符号的可允许循环节.

vi $\Rightarrow$ vii 据命题 4, $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$. 据 § 14 的命题 3 的推论，存在 $0<l\leqslant s$, 使 $\mathrm{ent}(\sigma_{A_{k_l}})>0$. 据 § 14 的命题 4 的推论，$\sigma_{A_{k_l}}$ 不是极小的. 再据命题6，即得 $\sigma_{A_{k_l}}$ 是混沌的，从而 σ_A 也是混沌的.

vii ⇒ viii　明显.

viii ⇒ ix　设 x、$y\in \Lambda_A$ 是 σ_A 的两个混沌点偶. 据 §7 的命题 3, 混沌点偶中至多有一个是渐近周期点. 设 x 不是 σ_A 的渐近周期点. 显然, $\omega(x, \sigma_A)$不是一条周期轨道.

ix ⇒ x　设 $x\in \Lambda_A$, $\omega(x, \sigma_A)$不是一条周期轨道. x 显然不是 σ_A 的渐近周期点. 据 §2 的命题 4, $\omega(x, \sigma_A)$不可数.

x ⇒ xi　$\Omega(\sigma_A)$无限蕴涵它不可数. 据 §13 的命题 7, $P(\sigma_A)$ 无限. 显然,

$$P(\sigma_A)=\bigcup_{0<l\leqslant s} P(\sigma_{A_{kl}}).$$

因此, 存在 $0<l\leqslant s$, 使 $P(\sigma_{A_{kl}})$无限. 据 §13 的命题 9 中的 iv, $G(\boldsymbol{A}_{kl})$至少有两条不同不可约闭路, 其中一条过所有顶点. 这就蕴涵 $G(\boldsymbol{A})$有两条不同不可约闭路过同一顶点.

xi ⇒ i　$G(\boldsymbol{A})$有两条不同不可约闭路过同一顶点显然蕴涵存在两个不同可允许循环节, 它们有公共符号. 再重复不同倍数, 即可得到两个长度不相同但有公共符号的相同的可允许循环节. 据命题 4, 我们有

$$\mathrm{ent}(\sigma_A)>0.$$

至此, 命题 8 证毕. □

§15　有限型子转移的混合性

如同拓扑熵和混沌一样, 混合性也是描述连续作用在底空间上引起的运动的混乱程度或复杂性的一个概念. 我们希望比较它与正拓扑熵和混沌之间的强弱关系. 对有限型子转移而言, 这些问题已有完整的结果. 本节我们就来讨论这些问题. 我们将证明, 对有限型子转移而言, 强和弱拓扑混合性是一致的, 并给出一系列等价条件; 同时指出, 拓扑混合性比正拓扑熵和混沌强, 即前者蕴涵后者, 但反之不然.

§ 15.1 辅助命题

设 $k\geqslant 2$, (S^{Z_+}, σ)和 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为 $k\times k$ 阶 0, 1-方阵.

引理 1 设 $n_1, \cdots, n_i$ 是 i 个正整数($i\geqslant 2$), 使得

$$d(n_1, \cdots, n_i)=d\geqslant 1,$$

则对任意正整数 c, 存在正整数 $x_1, \cdots, x_i$, 满足

$$d(n_1+x_1c_1, \cdots, n_i+x_ic)=d,$$

其中 d 表示最大公约数.

证明 据初等数论的一个基本定理,存在正整数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_i$ 和 $0<j<i$, 使得

$$\lambda_1n_1+\cdots+\lambda_jn_j+d=\lambda_{j+1}n_{j+1}+\cdots+\lambda_in_i.$$

在这个等式两端分别加上 j 个 $\lambda_1\cdots\lambda_i(i-j)c$ 和 $i-j$ 个 $\lambda_1\cdots\lambda_ijc$, 我们有

$$\begin{aligned}&(\lambda_1n_1+\lambda_1\cdots\lambda_i(i-j)c)+\cdots+(\lambda_jn_j+\lambda_1\cdots\lambda_ijc)+d\\&=(\lambda_{j+1}n_{j+1}+\lambda_1\cdots\lambda_ijc)+\cdots+(\lambda_in_i+\lambda_1\cdots\lambda_ijc).\end{aligned}$$

令

$$x_l=\begin{cases}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{l-1}\lambda_{l+1}\cdots\lambda_i(i-j)c, & \text{当 } l=1, \cdots, j \text{ 时;}\\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{l-1}\lambda_{l+1}\cdots\lambda_ijc, & \text{当 } l=j+1, \cdots, i \text{ 时}\end{cases}$$

(规定 $\lambda_0=\lambda_{i+1}=1$). 显然有

$$\begin{aligned}&\lambda_1(n_1+x_1c)+\cdots+\lambda_j(n_j+x_jc)+d\\&=\lambda_{j+1}(n_{j+1}+x_{j+1}c)+\cdots+\lambda_i(n_i+x_ic).\end{aligned}$$

因此 $d(n_1+x_1c, \cdots, n_i+x_ic)=d$. □

引理 2 设 σ_A 是拓扑传递的. 若 $G(\boldsymbol{A})$有 i 个闭路 $P_1, \cdots, P_i$, 周期分别为 $n_1, \cdots, n_i$($i\geqslant 2$), 且

$$d(n_1, \cdots, n_i)=d\geqslant 1,$$

则 $G(\boldsymbol{A})$有 i 个闭路,周期分别为 $m_1, \cdots, m_i$, 使得

$$d(m_1, \cdots, m_i)=d,$$

且这些闭路至少有一个公共顶点.

证明 据 § 13 的命题 8, $G(\boldsymbol{A})$有一条闭路过所有顶点, 记为

P，其周期为 $c>0$．据引理 1，存在正整数 $x_1, \cdots, x_i$ 使

$$d(n_1+x_1c, \cdots, n_i+x_ic)=d.$$

P 与 $P_1, \cdots, P_i$ 均至少有一个公共顶点．把 P 重复 x_l 次，然后与 P_l 在它们的公共顶点处合成新的闭路，记作

$$x_lP \to P_l,$$

其周期为 $n_l+x_lc(0<l\leqslant i)$．显然，i 个闭路

$$x_1P \to P_1, \cdots, x_iP \to P_i$$

都过 $G(A)$ 的所有顶点，当然至少有一个公共顶点，且它们的周期有最大公因数 d．证毕．

引理 3 设 $c_1, \cdots, c_i$ 是 σ_A 的全部不同不可约周期 $(i>1)$，如果

$$d(c_1, \cdots, c_i)=d\geqslant 1,$$

则每一个可允许循环节的长度以 d 为因子．

证明 因为每一个可允许循环节都是由可允许不可约周期节生成，引理的结论是明显的．

引理 4 假设同引理 3．设

$$V(B, j)={}_0[b_0 \cdots b_{j-1}]_A,\ V(E, l)={}_0[e_0 \cdots e_{l-1}]_A,$$

其中 $j\geqslant 1$，$l\geqslant 1$ 和 $b_0=e_0$，则对任意 $n>0$，

$$\sigma_A^n(V(B, j))\cap V(E, l)\neq\varnothing$$

蕴涵 $d|n$，即 d 整除 n．

证明 设

$$x=(x_0x_1\cdots)\in\sigma_A^n(V(B, j))\cap V(E, l),$$

即

$$x\in V(E, l),$$

且存在 $y=(y_0y_1\cdots)\in V(B, j)$，使得

$$\sigma_A^n(y)=x.$$

易见 $y_0=b_0=e_0=x_0=y_n$．因此 $(y_0\ y_1 \cdots y_{n-1})$ 是可允许循环节．据引理 3，我们有

$$d \mid n.$$ □

引理 5 设 σ_A 是拓扑传递的，且 $G(\boldsymbol{A})$ 有两个周期分别为 n_1 和 n_2 的闭路，使

$$d(n_1, n_2)=d\geqslant 1,$$

则 $G(\boldsymbol{A})$ 有两个周期分别为 m_1 和 m_1 的闭路，它们至少有一个共同顶点，且

$$d(m_1, m_2)=d.$$

证明 设

$$a_{b_0b_1}\to a_{b_1b_2}\to\cdots\to a_{b_{n_1-1}b_0}$$

和

$$a_{c_0c_1}\to a_{c_1c_2}\to\cdots\to a_{c_{n_2-1}c_0}$$

是 $G(\boldsymbol{A})$ 的两个闭路，它们的周期分别为 n_1 和 n_2. 设 a_{ij} 是 $G(\boldsymbol{A})$ 的任意顶点. 据 § 13 的命题 8, 设

$$P=a_{ij}\to\cdots\to a_{sb_0}\to a_{b_0b_1}\to a_{b_1t}\to\cdots\to a_{uc_0}$$
$$\to a_{c_0c_1}\to a_{c_1cv}\to\cdots\to a_{ij}$$

是经过顶点 a_{ij}、$a_{b_0b_1}$ 和 $a_{c_0c_1}$ 的一个闭路，其周期为 $c>0$, 其中 $0\leqslant s, t, u, v<k$. 记

$$P_1=a_{ij}\to\cdots\to a_{sb_0} \quad 和 \quad P_2=a_{b_1t}\to\cdots\to a_{ij}.$$

我们有

$$P=P_1\to a_{b_0b_1}\to P_2.$$

据引理 1, 存在正整数 λ 和 μ, 使

$$d(n_1+\lambda c,\ n_2+\mu c)=d.$$

易见，闭路

$$\overbrace{P\cdots P}^{\lambda-1\ 个}\to P_1\to a_{b_0b_1}\to a_{b_1b_2}\to\cdots\to a_{b_{n_1-1}b_0}\to P_2$$

过 a_{ij}, 且周期为 $n_1+\lambda c$. 类似地，可以得到过 a_{ij} 且周期为 $n_2+\mu c$ 的闭路. 证毕.

推论 1 设 σ_A 是拓扑传递的，且 $G(\boldsymbol{A})$ 有 i 个闭路($\geqslant 2$), 它们的周期以 $d\geqslant 1$ 为最大公因子. 则 $G(\boldsymbol{A})$ 有 i 个闭路，它们的周期以 d 为最大公因子，且它们至少有一个公共顶点.

证明类似，从略.

推论 2 设 σ_A 是拓扑传递的，且 $G(\boldsymbol{A})$ 有周期 m 和 n，使

$$d(m, n)=d\geqslant 1,$$

则对任意符号 $i_0\in S$，存在两个可允许循环节

$$(i_0\ i_1\cdots\ i_{s-1}),\qquad (i_0\ i_1'\ \cdots\ i_{t-1}'),$$

使得 $d(s, t)=d$.

证明 因为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 每一行和每一列都有不为 0 的元素，故存在 $0\leqslant l<k$，使 $a_{i_0l}=1$，即为 $G(\boldsymbol{A})$ 的一个顶点. 由 σ_A 的周期分别为 m 和 n 的周期点可得到 $G(\boldsymbol{A})$ 的两个周期分别为 m 和 n 的闭路. 据引理 5，可得到 $G(\boldsymbol{A})$ 的两个闭路，它们均过顶点 a_{i_0l} 且它们的周期以 d 为最大公因子. 易见，这两个闭路所决定的两个可允许循环节即是所求. □

引理 6 设 $c_1, \cdots, c_i$ 为 σ_A 的全部不同的不可约周期 $(i>1)$，其中 σ_A 拓扑传递，则

$$d(c_1, \cdots, c_i)=1$$

蕴涵 σ_A 有周期 m 和 n，使

$$d(m, n)=1.$$

证明 据假设 $G(\boldsymbol{A})$ 有 i 个闭路，周期分别为 $c_1, \cdots, c_i$. 据引理 5 的推论 1，$G(\boldsymbol{A})$ 有 i 个闭路，周期分别为 $m_1, \cdots, m_i$，它们至少有一个公共顶点，且

$$d(m_1, \cdots, m_i)=1.$$

这 i 个闭路决定了 i 个可允许循环节

$$P_1, \cdots, P_i,$$

它们的长度分别为 $m_1, \cdots, m_i$ 且它们均含有某个符号. 不失普遍性，可设它们的第一个符号相同. 存在正整数 $x_1, \cdots, x_i$，使得

$$x_1m_1+\cdots+x_jm_j=1+x_{j+1}m_{j+1}+\cdots+x_im_i\quad (0<j<i).$$

$G(\boldsymbol{A})$ 的闭路

$$\overbrace{P_1\cdots P_1}^{x_1}\ \overbrace{P_2\cdots P_2}^{x_2}\cdots\overbrace{P_j\cdots P_j}^{x_j}$$

和

$$\overbrace{P_{j+1}\cdots P_{j+1}}^{x_{j+1}}\cdots\overbrace{P_i\cdots P_i}^{x_i}$$

的周期分别为

$$x_1m_1+\cdots+x_jm_j$$

和

$$x_{j+1}m_{j+1}+\cdots+x_im_i,$$

因此互素. 易见，由这两个闭路决定的 σ_A 的两个周期点的周期分别是这两个闭路周期的因子，因而也必互素. □

引理 7 设 σ_A 是拓扑传递的，且有周期 m 和 n，使得

$$d(m,\ n)=1,$$

则存在 $N>0$，使对任意 $n\geqslant N$ 和任意 $i_0\in S$，存在可允许循环节

$$(i_0\ i_1\ \cdots\ i_{n-1}).$$

证明 据引理 5 的推论 2，可设

$$P_1=(i_0\ i_1\ \cdots\ i_{s-1})\quad 和\quad P_2=(i_0\ i_1'\ \cdots\ i_{t-1}')$$

是两个可允许循环节，其中 $s>1$，$t>0$，且

$$d(s,\ t)=1.$$

设 x 和 y 是正整数，使得

$$xs=1+yt.$$

下面证明，取 $N=sty$ 即可.

设 $n\geqslant N$. 记

$$n=(M+1)N+ls+r,$$

其中 $M\geqslant0$，$0\leqslant l<ty$ 和 $0\leqslant r<s$. 令

$$P_{1x}=\overbrace{P_1\cdots P_1}^{x}\quad 和\quad P_{2y}=\overbrace{P_2\cdots P_2}^{y}.$$

它们是可允许循环节，长度分别为 sx 和 yt. 易见，可允许循环节

$$\overbrace{P_1\cdots P_1}^{M+y+l}\overbrace{P_{1x}\cdots P_{1x}}^{r}\overbrace{P_{2y}\cdots P_{2y}}^{s-r}$$

的长度为

$$(Mty+l)s+rxs+(s-r)yt=(M+1)N+ls+r=n.\quad □$$

§ 15.2 若干等价条件

设 $k\geqslant 2$, $(S^{\mathbb{Z}_+}, \sigma)$和 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为 $k\times k$ 阶 0, 1-方阵.

定义 1 正整数集合

$$\{n>0 \mid a_{ii}^{(n)}>1,\ \forall 0\leqslant i<k\}$$

的最大公因子叫作"$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的周期", 亦称"σ_A 的周期".

本小节主要是证明下述重要命题.

命题 1 下述条件等价.

i) σ_A 是拓扑强混合的;

ii) σ_A 是拓扑弱混合的;

iii) σ_A 是拓扑传递的, 且

$$d(c_1,\ \cdots,\ c_l)=1,$$

其中 c_1, $\cdots$, c_l 是 σ_A 的全部不同不可约周期, $l\geqslant 2$;

iv) σ_A 是拓扑传递的, 且有周期 m 和 n, 使

$$d(m,\ n)=1;$$

v) $\boldsymbol{A}$ 是不可约的, 且存在 $0\leqslant i,\ j<k$ 和 n, 使得

$$a_{ij}^{(n)}>0, \qquad a_{ij}^{(n+1)}>0;$$

vi) $\boldsymbol{A}$ 是不可约的, 且有周期 1;

vii) $\boldsymbol{A}$ 是非周期的;

viii) $G(\boldsymbol{A})$有一条闭路, 过所有顶点, 且有两个周期互素的闭路.

证明 i $\Rightarrow$ ii 已知.

ii $\Rightarrow$ iii σ_A 拓扑传递是明显的. 下面用反证法. 设 $d(c_1,\ \cdots,\ c_l)=d\geqslant 2$. 记 $P_1=(i_0\ i_1\ \cdots\ i_{c_1-1})$是一个可允许不可约周期节. 显然, $P_2=(i_{c_1-1}\ i_0\ \cdots i_{c_1-2})$也是一个可允许不可约周期节. 令

$$V_1=V_2=U_1={}_0[i_0\ i_1\ \cdots\ i_{c_1-1}]_A$$

和
$$U_2={}_0[i_{c_1-1}\ i_0\ \cdots\ i_{c_1-2}]_A.$$

下面证明, 不存在 $n>0$, 使得

$$(\sigma_A\times\sigma_A)^n(V_1\times V_2)\cap(U_1\times U_2)$$
$$=(\sigma_A^n(V_1)\cap U_1)\times(\sigma_A^n(V_2)\cap U_2)\neq\varnothing.$$

设存在 $n>0$, 使上式成立, 即

$$\sigma_A^n(V_1)\cap U_1\neq\varnothing,\qquad \sigma_A^n(V_2)\cap U_2\neq\varnothing.$$

据引理 4, 由上面第一式得

$$d|n.$$

设

$$x\in\sigma_A^n(V_2)\cap U_2,$$

即 $x\in U_2$ 且存在 $y\in V_2$, 使

$$\sigma_A^n(y)=x.$$

由此即得

$$y_0=i_0,\qquad y_n=x_0=i_{c_1-1},\qquad y_{n+1}=i_0.$$

因此 $(y_0\ y_1\ \cdots\ y_n)$ 是可允许循环节, 其长度为 $n+1$. 据引理 3, 又有

$$d|n+1.$$

综上, 我们得到

$$d|n,\qquad d|n+1.$$

当 $d\geqslant 2$ 时, 这是不可能的. 这就证明了

$$d(c_1,\ \cdots,\ c_l)=1.$$

iii $\Rightarrow$ iv　由引理 6 给出.

iv $\Rightarrow$ v　据引理 5 的推论 2, 可设

$$P_1=(i_0\ i_1\ \cdots\ i_{s-1}),\qquad P_2=(i_0\ i_1'\ \cdots\ i_{t-1}')$$

是两个至少有一个公共符号的可允许循环节, 长度分别为 s 和 t, 且

$$d(s,\ t)=1.\qquad\qquad s>0,\ t>0$$

存在正整数 x 和 y, 使得

$$xs=1+yt.$$

因为 $\overbrace{P_1\cdots P_1}^{x}$ 是长度为 xs 的可允许循环节, 据 § 13 的命题 2,

$$a_{i_0i_0}^{(xs)}>0.$$

同样，$\overbrace{P_2\cdots P_2}^{y}$ 是长度为 yt 的可允许循环节，又有

$$a_{i_0i_0}^{(yt)}>0.$$

令 $xs=n$，即得

$$a_{i_0i_0}^{(n)}>0, \qquad a_{i_0i_0}^{(n+1)}>0.$$

v ⇒ vi　设 $0\leqslant i,\ j<k$ 和 $n>0$，使得

$$a_{ij}^{(n)}>0, \qquad a_{ij}^{(n+1)}>0.$$

据 § 13 的命题 2，存在从 i 到 j 的可允序列

$$P_1=(i\ i_1\ \cdots\ i_{n-1}\ j), \qquad P_2=(i\ i_1'\ \cdots\ i_n'\ j),$$

长度分别为 $n+1$ 和 $n+2$. 又据 § 13 命题 8 的推论，存在包含全部 k 个符号的可允许循环节：

$$P=(i\ \cdots\ j\ \cdots).$$

设 P 的长度为 $l\geqslant k$. P 中显然包含从 i 到 j 的一个可允许序列，设其长度为 $m>0$，用 P_1 和 P_2 分别代替 P 中从 i 到 j 的这个可允许序列，得到两个可允许循环节，它们的长度分别为

$$l-m+n+1, \qquad l-m+n+2.$$

而且，进而可以假设这两个可允许循环节每一个都仍然包含全部 k 个符号(例如，必要时可用 PP 代替 P 再施行上述代替即可). 据 § 13 的命题 2，我们有

$$a_{ii}^{(l-m+n+1)}>0, \qquad a_{ii}^{(l-m+n+2)}>0.$$

不难看出，这两个式子对所有 $0\leqslant i<k$ 均成立. 因此，集合

$$\{n>0\,|\,a_{ii}^{(n)}>0,\ \forall 0\leqslant i<k\}$$

中有相邻的两个整数. 这就证明了 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的周期为 1. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可约是明显的.

vi ⇒ vii　因为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可约，据 § 13 的命题 8 及其推论，存在包含全部 k 个符号的可允许循环节，并设其长度为 $n>0$. 因为可允许循环节由可允许不可约周期节生成，故

$$d(c_1,\ \cdots,\ c_t)\,|\,n,$$

其中 $c_1, \cdots, c_l$ 是 σ_A 的全部不同的不可约周期. 由定义 1 易见, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的周期亦可为 $d(c_1, \cdots, c_l)$整除. 据假设, 我们有

$$d(c_1, \cdots, c_l)=1.$$

即 iii 成立. 据 iv, 存在 σ_A 的两个周期 m 和 n, 使得

$$d(m, n)=1.$$

设 P 和 Q 是 $G(\boldsymbol{A})$的两个闭路, 周期分别为 m 和 n. 令 T 是 $G(\boldsymbol{A})$的过所有顶点的一个闭路, 周期为 $t>0$. 据引理 1, 存在正整数 λ 和 μ, 使得

$$d(m+\lambda t, n+\mu t)=1.$$

P 和 T 含有公共的顶点. 重复 T λ 次, 再与 P 在它们任一个公共顶点处合成一个新的闭路, 其周期为 $m+\lambda t$. 同样, 重复 T μ 次再与 Q 在它们的任一共同顶点处合成一个新闭路, 其周期为 $n+\mu t$. 这两个新闭路决定了两个包含全部 k 个符号的可允许循环节, 其长度分别为 $m+\lambda t$ 和 $n+\mu t$. 据互素数的性质, 存在正整数 r 和 s, 使得

$$s(m+\lambda t)=r(n+\mu t)+1.$$

由 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的不可约性, 存在 $h>0$, 使得

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^h\gg\boldsymbol{0}.$$

下面证明 $\boldsymbol{A}^{hs(m+\lambda t)}\gg\boldsymbol{0}$.

设 g_1 和 g_2 是任意两个正整数. 显然存在包含全部 k 个符号的可允许循环节, 其长度为 $g_1s(m+\lambda t)$. 即对每一个 $i\in S$, 存在长度为 $g_1s(m+\lambda t)$的可允许循环节. 据 § 13 的命题 2, 我们有

$$a_{ii}^{(g_1s(m+\lambda t))}>0. \qquad \forall\, 0\leqslant i<k$$

即方阵 $\boldsymbol{A}^{g_1s(m+\lambda t)}$ 的主对角线上元素均不为 0. 对 $\boldsymbol{A}^{g_1r(m+\lambda t)}$, $\boldsymbol{A}^{g_1s(m+\lambda t)}\boldsymbol{A}^{g_2r(n+\mu t)}$ 有相同的结论. 于是根据矩阵乘法的基本性质, 我们有

$$\boldsymbol{A}^{hs(m+\lambda t)}=\boldsymbol{A}^{(h-1)s(m+\lambda t)}\boldsymbol{A}^{r(n+\mu t)}\cdot\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A}^{hs(m+\lambda t)}=\boldsymbol{A}^{(h-2)s(m+\lambda t)}\cdot\boldsymbol{A}^{2r(n+\mu t)}\cdot\boldsymbol{A}^2\geqslant\boldsymbol{A}^2,$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{A}^{hs(m+\lambda t)}=\boldsymbol{A}^{hr(n+\mu t)}\boldsymbol{A}^h\geqslant\boldsymbol{A}^h.$$

两端相加，得

$$\boldsymbol{A}^{hs(m+\lambda t)}\geqslant\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^h\gg\boldsymbol{0}.$$

即 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是非周期的.

vii ⇒ viii 设 $n>0$，使 $\boldsymbol{A}^n\gg0$. 当然亦有 $\boldsymbol{A}^{n+1}\gg0$. 因此，

$$a_{ii}^{(n)}>0,\qquad a_{ii}^{(n+1)}>0.\qquad\qquad \forall\, 0\leqslant i<k$$

据 §13 的命题 2，存在两个可允许循环节，它们的长度分别为 n 和 $n+1$. 它们决定了 $G(\boldsymbol{A})$ 的两个闭路，周期分别为 n 和 $n+1$. 因此，它们的周期互素.

$G(\boldsymbol{A})$ 有一条闭路过所有顶点是明显的，因为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是非周期的，当然也是不可约的(见 §13 的命题 8).

viii⇒i 设

$$V(B,\ j)={}_0[b_0\,b_1\cdots b_{j-1}]_A,\qquad V(E,\ l)={}_0[e_0\,e_1\cdots e_{l-1}]_A$$

是任意两个相对柱形. $G(\boldsymbol{A})$ 有一条闭路过所有顶点，据 §13 的命题 8，σ_A 是拓扑传递的. 又据 §13 的命题 8 的推论，存在包含全部 k 个符号的可允许循环节. 因此，存在可允许序列

$$(b_0\,b_1\cdots b_{j-1}x_j\cdots x_{r-1}\,e_0),\qquad\qquad r\geqslant j$$

据引理 7，存在 $N>0$，使得对任意的 $m\geqslant N$，存在可允许循环节 $(e_0\,e_1'\cdots e_{m-1}')$，因此，

$$(b_0\,b_1\cdots b_{j-1}\,x_j\cdots x_{r-1}\,e_0\,e_1'\cdots e_{m-1}'\,e_0)$$

是可允许序列，长度为 $m+r+1$. 因为

$$V(B,\ j)={}_0[b_0\,b_1\cdots b_{j-1}]_A$$

$$\supset{}_0[b_0\,b_1\cdots b_{j-1}\,x_j\cdots x_{r-1}\,e_0\,e_1'\cdots e_{m-1}'\,e_0\cdots e_{l-1}]_A,$$

故

$$\sigma_A^{r+m}(V(B,\ j))$$

$$\supset\sigma_A^{r+m}({}_0[b_0\,b_1\cdots b_{j-1}x_j\cdots x_{r-1}\,e_0\,e_1'\cdots e_{m-1}'\,e_0\cdots e_{l-1}]_A)$$

$$={}_0[e_0\cdots e_{l-1}]_A=V(E,\ l).\qquad\qquad\forall m\geqslant N$$

令 $M=r+N$。我们有

$$\sigma_A^n(V(B,\ j))\cap V(E,\ l)\neq\varnothing. \qquad \forall n\geqslant M$$

命题 1 至此证明完毕.

推论 1 σ_A 拓扑混合 $\Rightarrow \mathrm{ent}(\sigma_A)>0$ 和 σ_A 混沌; 反之不然.

证明 设 σ_A 拓扑混合. 据命题 1 的 viii, 易证 $G(\boldsymbol{A})$ 有两条周期互素的闭路经过同一个顶点. 据 § 14 的命题 8, $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$ 和 σ_A 混沌.

下述例子说明, 拓扑传递和正拓扑熵并不蕴涵拓扑混合性. 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$G(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

易见, $G(\boldsymbol{A})$ 只有两个不可约闭路:

$$a_{01}\to a_{12}\to a_{20}, \qquad a_{01}\to a_{13}\to a_{30},$$

它们都过顶点 a_{01}. 据 § 14 的命题 8, $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$ 和 σ_A 是混沌的. 但据命题 1, σ_A 不是拓扑混合的, 因为它的周期都是 3 的倍数. □

推论 2 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是不可约的, 且主对角线上有非 0 元素, 则 $\boldsymbol{A}$ 是非周期的.

证明 据 § 13 命题 8, $G(\boldsymbol{A})$ 有一条闭路过所有顶点. 这明显地蕴涵 σ_A 有不小于 $k\geqslant 2$ 的周期. 另外, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 主对角线上有非 0 元素, 蕴涵 σ_A 有不动点, 即有 1 周期. 因此, σ_A 有互素的周期. 据命题 1, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是非周期的. □

推论 3 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可约, 则把 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素都变成

0(如果有非 0 元素的话)，其余的元素不变，则所得方阵仍然是不可约的.

证明 设 $a_{ii}=1(0\leqslant i<k)$. 据 § 13 的命题 8, $G(\boldsymbol{A})$有一条闭路过所有顶点，记为

$$P=\cdots\to a_{ji}\to a_{ii}\to a_{il}\to\cdots.$$

易见，在 P 中去掉所有顶点 a_{ii}(a_{ii} 可能出现不止一次)，仍然是一条闭路，且除了 a_{ii} 外过所有其余的顶点. 这证明在 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$中把主对角线上元素 a_{ii} 换成 0 而其他元素不变，所得方阵仍然是不可约的. 这个过程至多重复 k 次，即可得所要结论. □

命题 2 若 $2\leqslant k\leqslant 3$, 则 σ_A 拓扑混合当且仅当 σ_A 拓扑传递且 $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$.

证明 据命题 1, 只须证明充分性.

设 $k=2$. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$不可约情形只有下述四种:

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\ 和\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

其中前三种情形 σ_A 均有互素周期，因而 $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$, 且据命题 1, σ_A 也是拓扑混合的. 第四种情形 σ_A 只有 2 周期，因而不是拓扑混合的. 同时 $\mathrm{ent}(\sigma_A)=0$, 这证明 $k=2$ 结论成立.

设 $k=3$. 据推论 3, 可以只考虑 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的主对角线上元素全为 0 的情形. 又据 § 13 的命题 9 及其推论，如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的每一行和每一列都只有一个元素不为 0, 则 $\mathrm{ent}(\sigma_A)=0$ 且 σ_A 不是拓扑混合的，余下的情况是，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$至少有一行或一列，其上有两个元素不为 0. 先考虑只有一行或一列，其上有两个元素不为 0 的情况. 除掉转置不计外，只有下述两种情形:

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

易于看出，每一种情形的 σ_A 都有 2 和 3 两个周期，它们互素，因

而 $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$ 和 σ_A 是拓扑混合的.

当 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 有多于一行或一列，其上有两个元素不为 0 时，它显然可由上述两种情形再加上一个 0, 1-方阵而得到. 据 §11 的命题 4, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是非周期的，因而 $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$ 和 σ_A 是拓扑混合的。 □

第6章

一 般 子 转 移

我们讨论符号动力系统有双重目标. 其一，是因为符号动力系统具有广泛的应用，其二，是把它当作在一般拓扑动力系统研究中从特殊系统到一般系统的一个过渡. 第5章系统讨论了有限型子转移，得到了一系列漂亮的结论，这使得有限型子转移在上述第一个目标中占有重要地位. 但是，有限型子转移类似一维动力系统，受制约条件太强，以致于其结果一般都不具有普遍性，这就降低了它在上述第二个目标中所占的地位.

本章将讨论的一般子转移是与有限型子转移大不相同的. 到目前为止，人们对一般子转移的研究还远不充分，所获结果也显得零星. 如果说有限型子转移已经形成理论，则一般子转移的研究还处在较为初级阶段，其理论还有待建立. 第5章中关于有限型子转移的结论对一般子转移大多不再成立，这对上述第二个目标而言是一件好事，因为较之有限型子转移，一般子转移很可能是由特殊到一般的一个更好的过渡. 一般子转移的任何进展都可以使我们对一般拓扑动力系统有进一步的认识和了解.

本章首先讨论两个一般子系统的例子，用以说明拓扑熵与混沌的关系远不像有限型子转移所表明的那样简单. 我们还有一般子转移的例子，说明混合性与拓扑熵和混沌的关系也不那么简单，但因为这已超出本书范围而不得不割爱. 有兴趣的读者会在遍历理论的学习和讨论中遇到它们. 最后我们介绍一种产生一般子转移的一般方法——代换动力系统，但是同样因为超出本书范围的原因，我们只能限于简单介绍，浅尝则止，有兴趣的读者可去参阅有关文献(参阅[44]).

§16 两个例子

§16.1 例子 1

我们曾证明，对于线段动力系统而言，正拓扑熵与系统在非游荡集上的混沌等价(§7 命题 5). 我们自然要问：这个结论对一般情形是否也成立？据 §14 命题 8 和 §14 命题 6 的推论 2，这个结论对有限型子转移是成立的. 但是，正如我们在 §7 中所说的那样，它对一般情形并不成立. 为了说明这一点，只须构造一个反例. 本小节的目的就是用符号动力系统这个工具构造这样一个反例. 显然，下面我们所构造的子转移不是有限型的.

取 $k=2$, $S=\{0, 1\}$ 和$(S^{\mathbb{Z}_+}, \sigma)$同前. 下面构造一个点 $x\in S^{\mathbb{Z}_+}$，使得子转移

$$\sigma|_{\omega(x,\sigma)}:\qquad \omega(x, \sigma)\to\omega(x, \sigma)$$

具有所需要的性质.

构造 $x\in S^{\mathbb{Z}_+}$ 如下：令

$P_0=(1\quad 0)$,

$P_1=P_0Q_0$, 其中 $Q_0=(0\quad 0)$, $|Q_0|=|P_0|\times 1$,

$P_2=P_0Q_0P_1Q_1=P_1P_1Q_1$, 其中 $Q_1=(0\ 0\ \cdots\ 0)$, 使得

$$|Q_1|=|P_1P_1|\times 2,$$

归纳地，对 $n>1$, 令

$P_n=P_0Q_0\cdots P_{n-1}Q_{n-1}=P_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}$, 其中 $Q_{n-1}=(00\cdots 0)$, 使得 $|Q_{n-1}|=|P_{n-1}P_{n-1}|\times n$.

记 $$x=P_0Q_0P_1Q_1\cdots P_nQ_n\cdots\in S^{\mathbb{Z}_+}.$$

我们有下述简单事实.

(1) $x\in R(\sigma)$, 即 x 是 σ 的回复点.

由上述构造易见，对每一个 $n>0$, P_n 的前 $|P_0Q_0\cdots P_{n-1}|=|P_{n-1}P_{n-1}|$ 个坐标分量与 x 的前 $|P_{n-1}P_{n-1}|$ 个坐标分量对应相

等．由回复点的定义和 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 上度量 ρ 的定义，显然有 $x\in R(\sigma)$.

(2) $\omega(x, \sigma)\cap P(\sigma)=\{e=(0\ 0\ \cdots)\}$，即 $\omega(x, \sigma)$ 只包含 σ 的一个周期点 $e=(0\ 0\ \cdots)$.

由上述构造易见，$|Q_n|\to\infty(n\to\infty)$．显然 $e\in\omega(x, \sigma)$．又，不难看出，由任意长元素不全为 0 的有限序列生成的 σ 的周期点不能是 $\mathrm{orb}(x)$ 的极限点，即 $\omega(x, \sigma)$ 不包含除 $e=(0\ 0\ \cdots)$ 外的 σ 的周期点.

(3) $\omega(x, \sigma)$ 是无孤立点的不可数集.

由 x 的构造易见，x 不是 σ 的渐近周期点．据 §2 的命题 4，$\omega(x, \sigma)$ 不可数．$\omega(x, \sigma)$ 无孤立点是明显的.

考虑子转移

$$\sigma|_{\omega(x,\sigma)}: \qquad \omega(x, \sigma)\to\omega(x, \sigma).$$

据(2)和(3)，有

$$\overline{P(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})}\subsetneqq\Omega(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})=\omega(x, \sigma).$$

因此，据 §13 的命题 7，$\sigma|_{\omega(x,\sigma)}$ 不是有限型的.

下面我们将证明：

i) $\mathrm{ent}(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})=0$.

ii) $\sigma|_{\omega(x,\sigma)}$ 在李-约克意义下混沌.

先来计算 $|P_n|$，$\forall n\geqslant 0$.

引理 1 $|P_n|=(n+1)!2^n$，$\forall n>0$.

证明 从上述构造，有 $|P_0|=2$，$|P_1|=4$．当 $n=1$ 时结论成立.

设结论对 $n>1$ 已成立．据上述构造，易见

$$\begin{aligned}|P_{n+1}|&=|P_nP_nQ_n|=2|P_n|+2|P_n|\times(n+1)\\&=2|P_n|(n+2)=(n+2)!2^{n+1}.\end{aligned}$$

□

引理 2 设 T_n 是 $S=\{0, 1\}$ 上有限序列，$|T_n|=|P_0Q_0\cdots P_n|=|P_nP_n|$，则 T_n 可以出现在 x 内蕴涵 T_n 可以出现在 P_{n+3} 内．再者，当 T_n 的第一个坐标分量为 1 时，T_n 可以出现在 x 内蕴涵 T_n 可以出现在 P_{n+1} 内.

证明 当$T_n=(0\ 0\ \cdots)$时，因为$|Q_{n+2}|>|P_nP_n|$，显然T_n可以出现在$P_{n+3}=P_{n+2}P_{n+2}Q_{n+2}$内。

下设T_n至少有一个坐标分量不为0，且可以出现在x内。据x的构造易见，存在$j>n$，T_n可以出现在P_j内。下设$j>n+3$。我们断言，T_n可以出现在P_{j-1}内。因为

$$P_j=P_{j-1}P_{j-1}Q_{j-1},$$
$$|P_{j-1}|>|P_{n+2}|>|P_nP_n|,$$

故T_n可以出现在P_{j-1}、$P_{j-1}P_{j-1}$或$P_{j-1}Q_{j-1}$内，但不能出现在Q_{j-1}内。只须讨论后面两种情形即可。先讨论第二种情形，即T_n可以出现在

$$P_{j-1}P_{j-1}=P_{j-2}P_{j-2}Q_{j-2}P_{j-1}$$

内。因为$|Q_{j-2}|>|Q_n|>|T_n|$，故T_n出现在

$$P_{j-2}P_{j-2}Q_{j-2}=P_{j-1}\quad 或\quad Q_{j-2}P_{j-1}$$

内。设T_n出现在

$$Q_{j-2}P_{j-1}=Q_{j-2}P_{j-2}P_{j-2}Q_{j-2}$$

内(没有出现在P_{j-1}内，否则断言成立)。因为

$$|P_{j-2}|>|P_{n+1}|>|T_n|,$$
$$|Q_{j-3}|\geqslant|Q_n|>|T_n|,$$

易由x的构造中看出，T_n亦可以出现在

$$Q_{j-3}P_{j-2}$$

内，因而可以出现在

$$P_{j-3}P_{j-3}Q_{j-3}P_{j-2}Q_{j-2}=P_{j-2}P_{j-2}Q_{j-2}=P_{j-1}$$

内。第二种情形断言证毕。

再讨论第三种情形，即T_n出现在

$$P_{j-1}Q_{j-1}=P_{j-2}P_{j-2}Q_{j-2}Q_{j-1}$$

内。因为$|Q_{j-2}|>|Q_n|>|T_n|$，故T_n出现在

$$P_{j-2}P_{j-2}Q_{j-2}=P_{j-1}$$

内。

综合上述，我们证明了T_n亦可以出现在P_{j-1}内。上述过程

可以持续下去，直到 $j=n+3$ 为止，即 $T_n \prec x \Rightarrow T_n \prec P_{n+3}$.

当 T_n 的第一个坐标分量为 1 时，$T_n \prec x \Rightarrow T_n \prec P_{n+1}$ 的证明类似(即上述过程可以持续到 $j=n+1$ 时为止)，细节略去. □

引理 3 P_{n+3} 含有长度为 $|P_nP_n|$ 的不同子序列的基数不大于

$$|P_{n+3}|-|P_nP_n|=(n+4)!2^{n+3}-(n+1)!2^{n+1}, \quad \forall n>0$$

证明 当 $i=1, 2, \cdots, |P_{n+3}|-|P_nP_n|$ 时，以 P_{n+3} 的第 i 个坐标分量为第 1 个坐标分量，可得到 P_{n+3} 的全部长度为 $|P_nP_n|$ 的子序列. 引理中的估计由引理 1 给出. 易见，这些子序列并不是两两不相同的. □

回忆一下 § 14 中的符号.

$$\begin{aligned}Q_n(\omega(x, \sigma)) &= \#(\{(i_0 \cdots i_{n-1}) \mid \exists y \in \omega(x, \sigma), \\ &\qquad y_0=i_0, \cdots, y_{n-1}=i_{n-1}\}) \\ &= \#\{(i_0 \cdots i_{n-1}) \mid {}_0[i_0 \cdots i_{n-1}]_{\omega(x,\sigma)} \neq \varnothing\}.\end{aligned}$$

引理 4 $(i_0 \cdots i_{n-1}) \in Q_n(\omega(x, \sigma))$ 当且仅当 $(i_0 \cdots i_{n-1}) \prec x$，即 $(i_0 \cdots i_{n-1})$ 出现在 x 内.

证明 设

$$(i_0 \cdots i_{n-1})=(y_0 \cdots y_{n-1}),$$

其中 $y=(y_0 y_1 \cdots) \in \omega(x, \sigma)$. 据定义，存在 $l>0$，使 $\sigma^l(x)$ 与 y 的前 n 个坐标分量对应相等，即为 $(i_0 \cdots i_{n-1})$. 因此

$$(i_0 \cdots i_{n-1}) \prec x.$$

下设 $(i_0 \cdots i_{n-1}) \prec x$. 即存在 $l>0$，使 $\sigma^l(x)$ 的前 n 个坐标分量与 $(i_0 \cdots i_{n-1})$ 对应相等. 记 $y=\sigma^l(x) \in \omega(x, \sigma)$. 则

$$(i_0 \cdots i_{n-1})=(y_0 \cdots y_{n-1}),$$

即

$$(i_0 \cdots i_{n-1}) \in Q_n(\omega(x, \sigma)).$$

i 的证明 据引理 1～引理 3，得

$$Q_{|P_nP_n|}(\omega(x, \sigma)) \leqslant (n+4)!2^{n+3}-(n+1)!2^{n+1}$$
$$\leqslant (n+4)!2^{n+3}. \qquad \forall n>0$$

据§14的命题2，有

$$\text{ent}(\sigma|_{\omega(x,\sigma)}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(\omega(x, \sigma))$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|P_nP_n|}\log Q_{|P_nP_n|}(\omega(x, \sigma))$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!2^n}\log(n+4)!2^{n+3}=0.$$

ii 的证明 即证明存在不可数集合 $M_0\subset\omega(x, \sigma)$，满足

a) $\limsup\limits_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(x), \sigma^n(y))\geqslant 1,\ \forall x, y\in M_0,\ x\neq y$；

b) $\liminf\limits_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(x), \sigma^n(y))=0,\ \forall x, y\in M_0.$

先估计 $P_0Q_0\cdots P_n$ 中坐标分量为1的个数. 据定义，

$$P_0Q_0\cdots P_n=P_nP_n=P_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}$$

和
$$|Q_{n-1}|=|P_{n-1}P_{n-1}|\times n,$$

因此

$$\frac{1}{|P_0Q_0\cdots P_n|}\#(\{i|x_i=1,\ 0\leqslant i<|P_nP_n|\})$$
$$\leqslant\frac{2|P_{n-1}P_{n-1}|}{2(n+1)|P_{n-1}P_{n-1}|}=\frac{1}{n+1}. \qquad \forall n>0$$

显然，出现在 $P_{n+1}=P_0Q_0\cdots P_nQ_n$ 内长度为 $|P_nP_n|$ 的任意有限序列其坐标分量为1的个数不大于 P_nP_n 中坐标分量为1的个数，即不大于 x 前 $|P_nP_n|$ 个坐标分量中1的个数，因此

$$\frac{1}{n+1}\geqslant\frac{1}{|P_nP_n|}\#(\{i|x_i=1,\ 0\leqslant i<|P_nP_n|\})$$
$$\geqslant\frac{1}{|P_nP_n|}\#(\{i|x_{i+k}=1,\ 0\leqslant i<|P_nP_n|\}),$$

其中 $k\geqslant 0$ 且 $k+|P_nP_n|\leqslant|P_{n+1}|$.

记 $\quad M=\{y\in\omega(x, \sigma)|\omega(y, \sigma)=\omega(x, \sigma)\}.$

据§8的命题1，M 是 $\omega(x, \sigma)$ 内一个处处稠密的 G_δ 型集，即 $\omega(x, \sigma)$ 可数个处处稠密的开集的交集.

引理 5 M 是不可数的.

证明 设 $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\omega(x, \sigma)$的处处稠密开集序列，使

$$M=\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n.$$

设 M 可数，即可写成

$$M=\{m_1, m_2, \cdots\}, \quad m_i \in \omega(x, \sigma), \ \forall i \geqslant 1$$

显然，

$$Q_1, Q_2, \cdots, \omega(x, \sigma)-\{m_1\}, \omega(x, \sigma)-\{m_2\}, \cdots$$

亦是 $\omega(x, \sigma)$的可数个处处稠密的开集. 易见

$$\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n\right\} \cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(\omega(x, \sigma)-\{m_i\})\right)=\varnothing.$$

但这与点集拓扑中著名的 Baire 定理(表述为：完备度量空间中可数个处处稠密开集之交在原空间内处处稠密，参见[2])相矛盾. □

引理 6 集合

$$M_y=\{z \in M \mid \operatorname{orb}(z) \cap \operatorname{orb}(y) \neq \varnothing\} \qquad y \in \omega(x, \sigma)$$

是可数的；且 y、$z \in M$，则

$$M_y \cap M_z \neq \varnothing \Rightarrow M_y=M_z.$$

证明 设 $z \in M_y$，即存在 $i \geqslant 0$、$j \geqslant 0$，使

$$\sigma^i(z)=\sigma^j(y).$$

对固定的 $\{i, j\}$，满足这个条件的 $z \in M$ 是有限的，不超过 2 个，而整数偶 $\{i, j\}$ 是可数的，故 M_y 是可数的. 余下部分是明显的. □

据引理 6，可在 M 上建立关系"$\sim$"：

$$y \sim z \Leftrightarrow M_y=M_z.$$

易见"$\sim$"是自反的，对称的和传递的，因而是等价关系. 因此，M 可由"$\sim$"分成等价类. 据引理 5 和引理 6，由等价类构成的商空间 $M/\sim$ 是不可数的. 利用选择公理，在每一个等价类中选一点，而构成一个不可数集合，记作 $M_0 \subset M$. 显然，M_0 中的不同两点轨道不相交. 下面证明，这个 M_0 即是 $\sigma|_{\omega(x, \sigma)}$ 的一个混沌集.

设 y、$z \in M_0$，$y \neq z$. 因为

$$\mathrm{orb}(y)\cap\mathrm{orb}(z)=\varnothing,$$

易见，对任意大的 $N>0$，存在 $k>N$，使 $\sigma^k(y)$ 与 $\sigma^k(z)$ 的第一个坐标分量不同。据度量 ρ 的定义，我们有

$$\limsup_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(y),\ \sigma^n(z))\geqslant 1.$$

ii 中的 a 获证。

设 y、$z\in M_0$。易见

$$\liminf_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(y),\ \sigma^n(z))=0$$

当且仅当对任意 $N>0$，存在 $k>0$，使得 $\sigma^k(y)$ 和 $\sigma^k(z)$ 的前 N 个坐标分量对应相等，即全为 0. 由此易见，对任意 $i\geqslant 0$、$j\geqslant 0$，

$$\liminf_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(y),\ \sigma^n(z))=0$$

当且仅当

$$\liminf_{n\to\infty}\rho(\sigma^{n+i}(y),\ \sigma^{n+j}(z))=0.$$

因此，下面总是可以假设 y 和 z 的第一个坐标分量都是 1.

构造一个新点 $w\in S^{\mathbb{Z}_+}$，使得

$$w_i=\begin{cases}0, & \text{若 } y_i=z_i;\\ 1, & \text{其余情形}, \ \forall i\geqslant 0.\end{cases}$$

由 w 的定义和前面的结果，我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|P_nP_n|}\#(\{i|w_i=1,\ 0\leqslant i<|P_nP_n|\})\\ &\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|P_nP_n|}(\#(\{i|y_i=1,\ 0\leqslant i<|P_nP_n|\})\\ &\qquad+\#(\{i|z_i=1,\ 0\leqslant i<|P_nP_n|\}))\\ &\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{2}{|P_nP_n|}\#(\{i|x_i=1,\ 0\leqslant i<|P_nP_n|\})\\ &\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0.\end{aligned}$$

由此，易于用反证法证明，对任意的 $N>0$，存在 $n>0$，使得 w 的前 $|P_nP_n|$ 个坐标分量中从某一个开始连续 N 个均为 0. 从定义可以看出，这蕴涵

$$\lim_{n\to\infty}\inf\rho(\sigma^n(y),\ \sigma^n(z))=0.$$

ii 证毕.

显然，有

$$\Omega(\sigma|_{\omega(x,\sigma)})=\omega(x,\ \sigma).$$

因此

$$\sigma|_{\omega(x,\sigma)}:\qquad \omega(x,\ \sigma)\to\omega(x,\ \sigma)$$

就是一个在非游荡集上混沌但有零拓扑熵的系统. 至此，我们完成了正拓扑熵与系统在非游荡集上混沌不等价的证明. 值得注意的是，上面构造的 $\omega(x,\ \sigma)$ 是拓扑传递的，但不是极小的. 也就是我们证明的是存在有零拓扑熵的拓扑传递的混沌系统. 我们可以继续提问：是否存在有零拓扑熵的混沌极小系统？这个问题在下一小节内给予回答.

§16.2 例子 2

本小节我们进一步利用符号动力系统构造另一个例子，说明存在具有零拓扑熵的极小混沌系统.

设 $k\geqslant 2$, $S=\{0,\ 1,\ \cdots,\ k-1\}$ 和 $(S^{\mathbb{Z}_+},\ \sigma)$ 同前.

引理 7 存在不可数子集

$$E\subset S^{\mathbb{Z}_+},$$

对其中任意不同两点

$$x=(x_0\ x_1\ \cdots),\qquad y=(y_0\ y_1\ \cdots),$$

满足 $x_n\neq y_n$ 的 n 是无限的.

证明 在 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 上定义关系 ~：

$$x\sim y\Leftrightarrow\{n\geqslant 0\mid x_n\neq y_n\}\text{ 是有限集}$$
$$\Leftrightarrow\text{存在 }n\geqslant 0,\text{ 使 }x_i=y_i,\ \forall i\geqslant n.$$

易见，~ 是自反的，对称的和传递的，因而是 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 上的一个等价关系，可据此把 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 中的点分成等价类. 记由等价类生成的商空间为 $S^{\mathbb{Z}_+}/\sim$.

设 $x\in S^{Z_+}$. 我们断言，集合

$$M_x=\{y\in S^{Z_+}|y\sim x\}$$

是可数的. 对任意 $n>0$, 记

$$M_{x,n}=\{y\in S^{Z_+}|y_i=x_i,\ \forall i\geqslant n\}.$$

显然，$M_{x,n}$ 是有限的，因此

$$M_x=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_{x,n}$$

是可数的. 断言获证. 上述断言明显地蕴涵商空间 $S^{Z_+}/\sim$ 是不可数的. 利用选择公理，在它的每一个等价类内选一点作代表，得到 S^{Z_+} 的一个子集合 E. 这个 E 显然满足引理要求. □

引理 8 设

$$x=(x_0\ x_1\ \cdots)\in S^{Z_+}.$$

若对任意 $j>0$, 存在 $N>0$, 使得

$$(x_0\ x_1\ \cdots\ x_j)\prec(x_i\ x_{i+1}\ \cdots\ x_{i+N}),\qquad \forall i\geqslant 0$$

则 $x\in A(\sigma)$, 即 x 是 σ 的几乎周期点.

证明 利用 S^{Z_+} 上度量 ρ_1(见§8). 取 $\varepsilon=\frac{1}{j}$. 据定义，

$$(x_0\ x_1\ \cdots\ x_j)\prec(x_i\ x_{i+1}\ \cdots\ x_{i+N})$$

蕴涵存在 $i+N-j\geqslant l\geqslant 0$, 使得

$$x_h=x_{i+l+h},\qquad h=0,\ \cdots,\ j$$

因此 $\rho_1(x,\ \sigma^{l+i}(x))<\frac{1}{j}=\varepsilon$. 即

$$\sigma^{l+i}(x)\in V(x,\ \varepsilon).$$

据§4的定义4, $x\in A(\sigma)$. 证毕.

设 K 是 $S=\{0,\ 1,\ \cdots,\ k-1\}$ 上有限序列的一个集合. S 上一个有限序列能用 K 中元素经首尾相连接而生成，就说这个有限序列可以用 K 表示.

下面设 $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是由 S 上有限序列构成的序列. 对每一个 $i\geqslant 0$, 记

$$K_i=\{a_0I_0a_1I_1\cdots a_{i-1}I_{i-1}a_i\,|\,a_j\in S,\ 0\leqslant j\leqslant i\}.$$

K_i 是 S 上有限序列的集合，它的基数为 S 中元素每次取 $i+1$ 个的排列数，即为 k^{i+1}.

定义 1 由 S 上有限序列构成的序列 $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$，如果对每一个 $i\geq 0$，

i) K_i 中 k^{i+1} 个不同元素按任意顺序经首尾相连接而生成的所有有限序列中至少有一个包含在 I_i 中，

ii) 对每一个 $a\in S$，$I_i a$ 可用 K_i 表示. 则说序列 $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是**正规的**.

引理 9 由 S 上有限序列构成的正规序列 $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是存在的.

证明 用归纳法证明之. 令

$$I_0=(0,\ 1,\ \cdots,\ k-1).$$

注意到 $K_0=\{0,\ 1,\ \cdots,\ k-1\}$，易见定义 1 中的 i 和 ii 成立.

下设 $m\geq 1$，I_0，$\cdots$，I_{m-1} 已定义，且满足定义 1 中的 i 和 ii. 设 J_m 是 S 上有限序列的集合

$$K_m=\{a_0I_0a_1I_1\cdots a_{m-1}I_{m-1}a_m,\ a_i\in S,\ 0\leqslant i\leqslant m\}$$

中所有 k^{m+1} 个不同元素按任意次序经首尾相连接而生成的有限序列. 令

$$I_m=J_m\ 0\ I_0\ 0\ I_1\ \cdots\ 0\ I_{m-1}.$$

易于验证，对 I_m 定义 1 中 i 和 ii 仍然成立. 按归纳法，我们得到了 $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ 满足定义 1 中条件 i 和 ii，即它是正规的. □

引理 10 设由 S 上有限序列构成的序列 $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是正规的. 对每一个 $j\geq 0$，若 $i\geq j$ 且 $A\in K_i$，则 A 可用 K_j 表示.

证明 给定 $j\geq 0$. 对 i 用归纳法证明之. 当 $i=j$ 时，结论显然成立. 下设 $l\geq j$ 时结论已经成立. 我们来证明结论对 $l+1$ 仍然成立.

设 $A\in K_{l+1}$. 按定义，存在 a_0，$\cdots$，$a_{l+1}\in S$，使

$$A=a_0I_0\cdots a_lI_la_{l+1}.$$

记

$$B=a_0I_0\cdots I_{l-1}a_l.$$

显然

$$B\in K_l.$$

据条件 ii, $I_l a_{l+1}$ 可用 K_l 表示. 因此 A 也可以用 K_l 表示. □

下面设 $k=2$. 并设 $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ 为按引理9方式构造的由 $S=\{0, 1\}$ 上有限序列构成的正规序列. 据引理8, $S^{\mathbb{Z}_+}$ 上存在不可数集合 E, 对其中任意不同两点

$$x=(x_0\ x_1\ \cdots),\qquad y=(y_0\ y_1\ \cdots),$$

$x_n\neq y_n$ 对无限多个 n 成立. 定义映射

$$\begin{cases}\varphi: & E\to S^{\mathbb{Z}_+} \\ & x\mapsto x_0I_0x_1I_1\cdots.\end{cases}$$

记 $D=\varphi(E)$.

引理 11 集合 D 是 σ 的一个不可数混沌集.

证明 易见

$$\varphi:\qquad E\to S^{\mathbb{Z}_+}$$

是单射, 因而 E 的不可数性蕴涵 D 不可数.

对任意 $a\in D$, 按定义存在 $(a_0\ a_1\ \cdots)\in E$, 使

$$a=a_0I_0a_1I_1\cdots.$$

记 $m_i=|a_0I_0\cdots I_{i-1}a_i|$. 显然

$$\sigma^{m_i}(a)=I_ia_{i+1}\cdots.$$

注意到 I_i 与 a 的选取无关, 且

$$|I_i|\to\infty\quad(i\to\infty),$$

对 D 中任意两点 x 和 y, 我们有

$$\liminf_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(x),\ \sigma^n(y))\leqslant\lim_{i\to\infty}\rho(\sigma^{m_i}(x),\ \sigma^{m_i}(y))=0.$$

又, 据 E 的性质, 当 x、$y\in D$, $x\neq y$ 时, 存在充分大的 n, 使 $x_n\neq y_n$. 据度量 ρ 的定义, 我们有

$$\limsup_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(x),\ \sigma^n(y))\geqslant 1.$$ □

引理 12 $\omega(y,\ \sigma)$ 是极小的, 且

$$D\subset\omega(y,\sigma),\qquad \forall y\in D$$

证明 设 $y=(y_0y_1\cdots)\in D$. 按定义, 存在 $b=(b_0b_1\cdots)\in E$, 使

$$y=\varphi(b)=b_0I_0b_1I_1\cdots=(y_0y_1\cdots).$$

注意, $(y_0\cdots y_p)$是 $b_0I_0b_1I_1\cdots$ 的前 $p+1$ 项的有限序列, 因而

$$(y_0\cdots y_{p+1})\prec b_0I_0b_1I_1\cdots I_{p-1}b_p. \qquad \forall p\geqslant 0$$

对给定的 $p\geqslant 0$, 据引理 10, y 可以表成形如

$$a_0I_0\cdots I_pa_{p+1}$$

的有限序列的一个无限排列, 其中 $a_i\in S$, $0\leqslant i\leqslant p+1$. 取

$$N=3|b_0I_0\cdots I_pa_{p+1}|.$$

对给定的 $i\geqslant 0$, 易见$(y_i\cdots y_{i+N})$包含某个 $a_0I_0\cdots I_pa_{p+1}$, 即

$$a_0I_0\cdots I_pa_{p+1}\prec(y_iy_{i+1}\cdots y_{i+N}).$$

因此, 据定义 1 中的 i, 我们有

$$(y_0\cdots y_p)\prec b_0I_0\cdots I_{p-1}b_p<I_p$$
$$\prec a_0I_0\cdots I_pa_{p+1}\prec(y_i\cdots y_{i+N}).$$

据引理 8, $y\in A(\sigma)$. 据 § 4 的命题 2, $\omega(y, \sigma)$是极小的.

下面证明 $D\subset\omega(y, \sigma)$, $\forall y\in D$. 设 $z\in D$. 据引理 11,

$$\liminf_{n\to\infty}\rho(\sigma^n(y), \sigma^n(z))=0.$$

显然

$$\omega(y, \sigma)\cap\omega(z, \sigma)\neq\varnothing.$$

因为它们都是极小的, 故有

$$\omega(y, \sigma)=\omega(z, \sigma).$$

因此 $$D\subset\bigcup_{y\in D}\omega(y, \sigma)=\omega(y, \sigma). \qquad \forall y\in D \quad \square$$

引理 13 $\operatorname{ent}(\sigma|_{\omega(y,\sigma)})=0$, $\forall y\in D$.

证明 下面取定 $i\geqslant 0$. 据 D 的定义和引理 10, 每一点 $y\in D$ 都可以用

$$K_i=\{a_0I_0\cdots I_{i-1}a_i|a_j\in S, 0\leqslant j\leqslant i\}$$

表示, 即可以写成形如

$$a_0I_0\cdots I_{i-1}a_i$$

的有限序列的无限排列．易见，K_i 中元素都有相同的长度，如同引理 11 那样，记作 m_i．

对每一个 $A\in K_i$，对每一个 $1\leqslant j\leqslant m_i$，记

$$A_{j1} \quad 和 \quad A_{j2}$$

是 S 上两个有限序列，满足

i) $|A_{j1}|=j,\ |A_{j2}|=m_i-j$,

ii) $A=A_{j1}A_{j2}$.

直观上，A_{j1} 和 A_{j2} 是 A 的一个分割．显然，这样的分割是唯一的．记

$$M_j=\{C\,|\,C=B_{j2}A_{j1},\ \forall A,\ B\in K_i\}.$$

定义映射

$$\begin{cases}\varphi_j: & K_i\to M_j\\ & A\mapsto A_{j2}A_{j1}.\end{cases}$$

由 K_i 的构造易见，

$$A,B\in K_i\Rightarrow A_{j1}B_{j2}\in K_i.$$

这蕴涵 φ_j 是在上的．因而

$$\#(M_j)\leqslant\#(K_i). \qquad \forall 1\leqslant j\leqslant m_i$$

如前所述，K_i 中含 2^{i+1} 个不同元素，因此

$$\#(M_j)\leqslant 2^{i+1}. \qquad \forall 1\leqslant j\leqslant m_i$$

设 C 为 S 上长度为 m_i 的有限序列，且

$$C\prec y, \qquad y\in D.$$

即存在 $l\geqslant 0$，使 $\sigma^l(y)$ 的前 m_i 个坐标分量构成的子序列与 C 相等．因为 y 可表示 K_i 中元素的一个无限排列，不难看出，存在 $A,\ B\in K_i$，对某个 $1\leqslant j\leqslant m_i$，使

$$C=B_{j2}A_{j1},$$

即 $C\in M_j$．因此

$$Q_{m_i}(\{y\})\leqslant\sum_{j=1}^{m_i}\#(M_j)\leqslant 2^{i+1}m_i.$$

据引理 4，我们有

$$Q_{m_i}(\omega(y,\ \sigma))=Q_{m_i}(\{y\})\leqslant 2^{i+1}m_i.$$

四

甲

另一方面，据 m_i 和 $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ 的定义，显然有

$$m_i \geqslant |I_{i-1}| \geqslant 2^i.$$

最后，据 §14 的命题 2，我们有

$$\begin{aligned}
\text{ent}(\sigma|_{\omega(y,\sigma)}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n(\omega(y,\sigma)) \\
&= \lim_{i\to\infty} \frac{1}{m_i} \log Q_{m_i}(\omega(y,\sigma)) \\
&\leqslant \lim_{i\to\infty} \frac{1}{m_i} \log 2^{i+1} m_i \\
&\leqslant \lim_{i\to\infty}\left(\frac{i+1}{2^i} \log 2 + \frac{1}{m_i} \log m_i\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

综合引理 11～引理 13，我们证明了

$$\sigma|_{\omega(y,\sigma)}: \quad \omega(y,\sigma)\to\omega(y,\sigma) \qquad \forall y\in D$$

是极小混沌系统，但有零拓扑熵.

§17 代换动力系统简介

上一节我们从有限序列出发，有目的地构造了两个一般子转移的例子，用以说明我们在本书前言中所说的，符号动力系统的另一种应用——构造反例. 本节介绍另一种构造一般子转移的方法——代换动力系统. 这是一个涉及面极广的研究领域，具有重要理论意义和应用背景. 我们的介绍限于某些基本定义和基本结果.

设 $k\geqslant 2$, $S=\{0, 1, \cdots, k-1\}$ 和 (S^{Z_+}, σ) 同前.

对每一个 $n>0$, 记

$$S^n=\{(i_0 \cdots i_{n-1}) | i_j\in S,\ j=0, \cdots, n-1\}.$$

即 S^n 是 S 上所有长度为 n 的有限序列的集合. 又记

$$S^*=\bigcup_{n>0} S^n.$$

S^* 是 S 上所有有限序列的集合.

定义 1 S 上一个代换 η 是指从 S 到 S^* 的一个单值对应:

$$\eta:\quad S\to S^*,$$

其中至少一个 $|\eta(i)|\geqslant 2$, $i\in S$.

一个代换 η 诱导出从 S^* 到 S^* 的一个单值对应(亦记作 η):

$$\begin{cases}\eta: & S^*\to S^*\\ & (b_0\cdots b_i)\mapsto\eta(b_0)\eta(b_1)\cdots\eta(b_i),\end{cases}$$

其中 $(b_0\cdots b_i)\in S^*$. 这个 η 是 S^* 到 S^* 的自映射, 因此可以进行迭代. 不难归纳证明, 对任意的 $n>0$,

$$\eta^n((b_0\cdots b_i))=\eta^n(b_0)\cdots\eta^n(b_i).$$

进而, η 又诱导出从 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 到 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 的一个单值对应 (亦记作 η):

$$\begin{cases}\eta: & S^{\mathbb{Z}_+}\to S^{\mathbb{Z}_+}\\ & (x_0\ x_1\ \cdots)\mapsto\eta(x_0)\eta(x_1)\cdots,\end{cases}$$

其中 $x=(x_0\ x_1\ \cdots)\in S^{\mathbb{Z}_+}$. 同样, 对任意的 $n>0$,

$$\eta^n(x)=\eta^n(x_0)\eta^n(x_1)\cdots.$$

命题 1 $\eta: S^{\mathbb{Z}_+}\to S^{\mathbb{Z}_+}$ 是连续的, 但非在上的.

证明 从上述定义易见, 当 $\rho(x, y)<1$ 时,

$$\rho(\eta(x), \eta(y))\leqslant\rho(x, y).\qquad \forall x, y\in S^{\mathbb{Z}_+}$$

这表明 η 是连续的. η 的非在上的性质也很容易从定义中看出, 请读者自行完成. □

这样, 我们得到了 $S^{\mathbb{Z}_+}$ 上的一个一般动力系统:

$$(S^{\mathbb{Z}_+}, \eta).$$

我们有兴趣的是这个动力系统的周期点.

命题 2 设

$$|\eta^n(i)|\to\infty\ (n\to\infty),\qquad \forall i\in S$$

则存在 $u\in S^{\mathbb{Z}_+}$ 和 $k>0$, 使 $\eta^k(u)=u$. 即 η 有周期点.

证明 任取 $i\in S$. 考查

$$\eta(i),\ \eta^2(i),\ \cdots,\ \eta^n(i),\ \cdots.$$

因为 S 是有限的, 因此存在 $n_1>n_2>0$, 使得 $\eta^{n_1}(i)$ 和 $\eta^{n_2}(i)$ 的第一个坐标分量相同. 这明显蕴涵, 存在 $k>0$ 和 $i\in S$, 使得 $\eta^k(i)$

的第一个坐标分量是 i.

任取 $x\in S^{\mathbb{Z}_+}$，使 $x_0=i$. 易见，对任意 $n>0$，$\eta^{nk}(x)$ 的前 $|\eta^{nk}(x_0)|$ 个坐标分量构成的有限序列是 $\eta^{nk}(x_0)$. 因此，$\eta^{nk}(x)$ 和 $\eta^{nk+pk}(x)$ 的前 $|\eta^{nk}(x_0)|$ 个坐标分量对应相等，其中 $p\geqslant 0$. 这表明 $\{\eta^{nk}(x)\}_{n>0}^{\infty}$ 是柯西序列，因而存在 $u\in S^{\mathbb{Z}_+}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\eta^{nk}(x)=u.$$

显然 $u=\eta^k(u)$，即 u 是 η 的一个周期点，周期 $\leqslant k$. 容易看出，u 可以由 η 在 i 上迭代作用而得到. □

为简单起见，我们称下述 i 和 ii 一起，为条件 (H)：

i) $|\eta^n(i)|\to\infty(n\to\infty)$，$\forall i\in S$;

ii) 存在 $i\in S$，使得 $\eta(i)$ 的第一个坐标分量是 i. 不失普遍性，可设满足这个性质的符号为 0.

据命题 2，满足条件 (H) 的代换 η 有一个不动点，记作 $u=\eta^{\infty}(0)$. 不失普遍性，下面我们总是假设 u 中包含 S 中全部符号.

[例 1] 取 $S=\{0, 1\}$. 令

$$\begin{cases}\eta(0)=(0\quad 1),\\ \eta(1)=(1\quad 0).\end{cases}$$

η 显然满足条件 (H). 容易看出，η 有两个不动点：

$$u=\eta^{\infty}(0)=(0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\cdots),$$

$$v=\eta^{\infty}(1)=(1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\cdots),$$

其中的 v 是把 u 中坐标 0 和 1 对换而得到的. u 叫作 Morse 序列.

[例 2] 取 $S=\{0, 1\}$. 令

$$\begin{cases}\eta(0)=(0\quad 1),\\ \eta(1)=(0).\end{cases}$$

这个 η 亦满足条件 (H). η 有一个不动点：

$$u=\eta^{\infty}(0)=(0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\cdots).$$

这个 u 叫作菲波那契序列.

设代换 η 满足条件(H)，并记 $u=\eta^{\infty}(0)$ 为它的不动点. 我们考虑 $u\in S^{\mathbb{Z}_+}$ 在转移自映射 σ 的作用下的轨道的闭包，即 $\overline{\mathrm{orb}(u)}$，得到一个子转移

$$\sigma|_{\overline{\mathrm{orb}(u)}}:\qquad \overline{\mathrm{orb}(u)}\to\overline{\mathrm{orb}(u)}.$$

这个子转移不一定是拓扑传递的.

[例 3] 取 $S=\{0, 1, 2\}$，并令

$$\begin{cases}\eta(0)=(0\quad 1),\\ \eta(1)=(2\quad 2),\\ \eta(2)=(1\quad 1).\end{cases}$$

易见 η 满足条件(H). 我们考查 η 的不动点 $u=\eta^{\infty}(0)$. 从 η 的定义不难看出，0 只在 u 内出现一次，即作为 u 的第一个坐标分量. 这样的点显然不是 σ 的回复点，因此 $\sigma|_{\overline{\mathrm{orb}(u)}}$ 不是拓扑传递的. 我们有下述判定命题.

命题 3 设代换 η 满足条件(H)，则不动点 $u=\eta^{\infty}(0)$ 是 σ 的回复点当且仅当 0 出现在 u 内至少 2 次.

证明 因为 u 的第一个坐标分量是 0，若 u 中不再出现 0，u 显然不是 σ 的回复点. 这就证明了必要性.

下证充分性. 从 η 的定义不难看出，u 含 2 个 0 蕴涵含无限多个 0. 易见，对任意的 $n>0$，$u=\eta^{\infty}(0)$ 的前 $|\eta^n(0)|$ 项的有限序列是 $\eta^n(0)$. 很显然，这样的有限序列在 u 内无限次出现，再注意到 $|\eta^n(0)|\to\infty(n\to\infty)$，这就证明了 $u=\eta^{\infty}(0)$ 是 σ 的回复点. □

设代换 η 满足条件(H)，并记 η 的不动点为 $u=\eta^{\infty}(0)$. 若 u 是 σ 的回复点，则 $\overline{\mathrm{orb}(u)}=\omega(u, \sigma)$，且

$$\sigma|_{\omega(u,\sigma)}:\qquad \omega(u, \sigma)\to\omega(u, \sigma)$$

是拓扑传递的，因而也是在上的. 现在要问：这样的 $\sigma|_{\omega(u,\sigma)}$ 是极小的吗？我们有下述重要结果.

命题 4 设代换 η 满足条件(H)，则 η 的不动点 $u=\eta^{\infty}(0)$ 是 σ 的几乎周期点，或等价地，$\overline{\mathrm{orb}(u)}$ 是 σ 的极小集(§4 的命题 2)当且仅当对每一个符号 $i\in S$，存在 $k>0$，使得 $\eta^k(i)$ 含有符号 0.

证明 设 $u\in A(\sigma)$. 从几乎周期点的定义易见, u 内任意固定的有限序列在 u 内无限次出现, 且其排列的间隔是有界的. 特别地, 0 在 u 内的排列间隔是有界的. 因为 $u=\eta^k(u)$, $\forall k\geqslant 1$, 故 u 包含 $\eta^k(i)$. 最后, 当 $k\to\infty$ 时, $\eta^k(i)$ 的长度亦趋于无穷, 因此, 对充分大的 k, $\eta^k(i)$ 含有 0. 这就证明了必要性.

下证充分性. 为证 $u\in A(\sigma)$, 只须证明 u 内任意固定的有限序列 B 在 u 内无限次出现, 且其排列间隔有界即可. 易于看出, 0 在 u 内无限次出现且其排列间隔有界蕴涵 $\eta^n(0)$ 在 u 内无限次出现且排列间隔有界, $\forall n>0$. 后者又蕴涵 u 内任意固定的有限序列 B 在 u 内无限次出现且其排列间隔有界, 因为当 n 充分大时有 $B\prec\eta^n(0)$. 因此, 为证 $u\in A(\sigma)$, 只须证明 0 在 u 内无限次出现且在 u 内的排列间隔有界即可.

设 $\eta^k(i)$ 含有 0, $i\in S$, $k>0$. 显然, $\eta^{k+1}(i)$ 含有 $\eta(0)$, 因而也含有 0. 记

$$K=\sup_{i\in S}\inf_{k\geqslant 1}\{k|0\prec\eta^k(i)\}.$$

显然, $\eta^K(i)$ 含有 0, $\forall i\in S$. 记 $u=(u_0\ u_1\ \cdots)$. 我们有

$$u=\eta^K(u_0)\eta^K(u_1)\cdots.$$

显然长度 $|\eta^K(u_i)|$ 是有界的, 且每一个 $\eta^K(u_i)$ 都含有 0. 这明显蕴涵 0 在 u 内无限次出现且其排列间隔有界. □

[例 4] 取 $S=\{0, 1, 2, 3\}$, 且令

$$\begin{cases}\eta(0)=(0\quad 1),\\ \eta(1)=(1\quad 0),\\ \eta(2)=(3\quad 3),\\ \eta(3)=(2\quad 2).\end{cases}$$

易见, η 满足条件 (H), 且 0 在不动点 $u=\eta^\infty(0)$ 内不只出现一次. 据命题 3, u 是 σ 的回复点. 但不难看出, 对任意 $n>0$, $\eta^n(2)$ 和 $\eta^n(3)$ 不含有 0. 因此, 据命题 4, u 不是 σ 的几乎周期点, 子转移

$$\sigma|_{\omega(u,\sigma)}:\quad \omega(u, \sigma)\to\omega(u, \sigma)$$

是拓扑传递的, 但不是极小的.

关于代换动力系统的讨论到此为止，因为再讨论下去不可避免地要遇到诸如遍历性等问题，那已不在本书讨论范围之内了．代换动力系统正被广泛研究着，有兴趣的读者请参阅有关文献（例如[44]）．

参 考 文 献

[1] R. L. Devaney, An Introduction to Chaos Dynamical Systems (Second Edition), Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.

[2] M. Eisenberg, Topology, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1974.

[3] R. A. Horn and C. R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[4] J. L. Kelley, General Topology, Van Nostrand, New York Inc., 1955.

[5] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Splinger-Verlap, New York, Inc., 1982.

[6] 江泽涵,«拓扑学引论»,上海科学技术出版社, 1978.

[7] 郑伟谋,郝柏林,«实用符号动力学»,上海科技教育出版社, 1994.

[8] 张景中,熊金城,«函数迭代与一维动力系统»,四川科技教育出版社, 1992.

[9] 张锦炎,钱敏,«微分动力系统导引»,北京大学出版社, 1991.

[10] 张筑生,«微分动力系统原理»,科学出版社, 1987.

[11] 谢惠民,«复杂性与动力系统»,上海科技教育出版社, 1995.

[12] R. L. Adler, A. G. Konheim and M. H. McAndrew, Topological Entropy, Trans. Amer. Math. Soc., **114**(1965), 309—319.

[13] J. Bank, J. Brooks, G. Gairns, G. Davis and D. Stacey, On Devaney's Definition of Chaos, The Amer. Math. Moonthly, **99**:**4** (1992), 332—334.

[14] L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz and L. S. Young, Periodic Points and Topological Entropy of One Dimensional Maps, Lecture Notes in Math., 819, 18—34.

[15] R. Bowen, Topological Entropy and Axiom A, Global Analysis, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 14, 23—41.

[16] R. Bowen and J. Franks, The Periodic Points of Maps of The Disk and The Interval, Topology, **15** (1976), 337—342.

[17] H. Chu and J. Xiong, A Counterexample in Dynamical Systems of The Interval, ICTP, Trieste, Preprint IC/84/38, 1984.

[18] W. H. Guckenheimer, Powers of Homeomorphisms with Almostt Periodic Properties, Bull. Amer. Math. Soc., **50** (1944), 222—227.

[19] W. H. Guckenheimer, Orbit-closure Decompositions and Almost Periodic Properties, Bull. Amer. Math Soc., **50** (1944), 915—919.

[20] F. J. Hahn and Y. Katznelson, On The Entropy of Uniquely Ergodic Transformations, Trans. Amer. Math. Soc., **126** (1967), 335—360.

[21] T.Y. Li and J. A. Yorke, Period Three Implies Chaos, Amer. Math. Moonthly, **82** (1975), 985—992.

[22] A. N. Sarkovskii, Coexistence of Cycles of a Continuous Map of a Line into Itself, Ukr. Mat. Z. **16** (1964), 61—71.

[23] S. Smale, Differentiable Dynamical Systems, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 747—781.

[24] P. Stefan, A Theorem of Sarkovskii on The Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphisms of The Real Line, Comm. Math. Phys., **54** (1977), 237—248.

[25] L. S. Young, On The Prevalence of Horseshoes, Proc. Amer. Math. Soc., **263**:**1** (1981), 75—88.

[26] J. Xiong and Z. Young, Chaos Caused by a Topologically Mixing Map, Dynamical Systems and Related Topics, Ed. by Shiraiwa, Singapore New York, World Scientific, 1992, 550—572.

[27] 熊金城，关于拓扑熵的一点注记，《科学通报》，**33**:**20** (1988), 1534—1536.

[28] 周作领，关于 Li-Yorke 定理的一点注记，《科学通报》，**31**:**1** (1986), 1—3.

[29] 周作领，小熵猜测的一个证明，《中国科学》，A 辑，**10** (1985), 881—889.

[30] 周作领，紊动与拓扑熵，《数学学报》，**31**:**1** (1988), 83—87.

[31] 周作领,关于多面体连续自映射的拓扑熵的几个性质,«中国科学», A 辑,**8**(1983), 707—711.
[32] 周作领,转移与子转移,«数学季刊», **2**(1991), 44—55.
[33] 周作领, 转移自映射的紊动性状, «数学 学 报», **30:2** (1987), 284—288.
[34] 周作领, 转移自同胚的紊动性状, «数学年刊», 8(A) **(6)**1987, 677—681.
[35] 周作领,紊动与全紊动,«科学通报», **32:4**(1987), 248—250.
[36] Zhou Zuoling, The Topological Markov Chain, Acta Mathematica Sinica, New Series, **4**(1988), 330—337.
[37] 周作领,拓扑 Markov 链——非游荡集和拓扑熵,«数学年刊»,9A (5) 1988, 604—608.
[38] Zhou Zuoling, The Topological Markov Chain——Transitivity and Mixing, Acta Mathematica Sinica, New Series, **9:1**(1993), 1—7.
[39] Zhou Zuoling. Locally Triangulable Spaces and Quasi-horseshoe Maps, Proceedings of Asian Mathematical Conference, 1990, Singapore New Jersey London Hong Kong, World Scientific, 1992.
[40] 周作领, 何伟弘, 轨道结构的层次与拓扑半共轭, «中国科学», A 辑, **25:5**(1995), 457—464.
[41] 刘旺金,动力体系中拓扑熵的研究, «数学进展», **11**(1980), 89—100.
[42] 张景中, 杨路, Smale 马蹄的一个简单模型, «科学通报», **26:12** (1981), 713—714.
[43] 张筑生,自映射的转移不变集,«数学学报», **27:4**(1984), 564—576.
[44] M. Queffelec, Substitution Dynamical Systems——Spectral Analysis, Springer-Verlag, 1987.